

Matematica Attuariale

Insieme di modelli matematici relativi all'attività assicurativa.

Attività assicurativa: attività economica consistente nella gestione dei “rischi” trasferiti ad un assicuratore da un operatore economico.

Art. 1882 c.c.

“Contratto col quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana”

Matematica Attuariale

La matematica attuariale studia i principi base per la valutazione dei contratti:

- valutazione costo coperture assicurative
- fissazione prezzo o *premio* delle coperture
- gestione del premio nel tempo \Rightarrow definizione e calcolo *riserve* “tecniche”

Aspetti

- **Finanziari** → differimenti nel tempo delle prestazioni assicurative
- **Probabilistici** → aleatorietà gestione dei rischi
 - modelli discreti
 - modelli continui
 - processi stocastici

Varietà tipologie assicurative ⇒ diversificazione modellistica

Classificazione assicurazioni libere

- Assicurazioni contro i **danni**
- Assicurazioni sulla **vita**
- Assicurazioni **sociali**
- Assicurazioni sulla **salute**

Assicurazioni contro i danni

➤ Risarcimento a fronte di:

- Danni materiali
 - alla persona
 - ai beni di proprietà dell'assicurato
- Situazioni di responsabilità civile

$f(\text{numero aleatorio sinistri})$

➤ Aleatorietà esborso

$f(\text{entità aleatoria danno ciascun sinistro})$

➤ Durata periodo copertura breve (1 anno)

Assicurazioni sulla vita

Pagamento di somme al verificarsi di prestabili eventi inerenti alla vita (“durata di vita”) di una o più persone

- Esborso
 - aleatorio “*se*”
 - aleatorio “*quando*”
 - definito “*quanto*”
(somme prestabilite o determinabili)
- Durata medio-lunga (min. 10-20 anni)

Assicurazioni sociali

Insieme di coperture assicurative “obbligatorie” fornite da:

- **Sistemi pubblici** (Stato, enti previdenziali e sanitari)
- **“Fondi” o “Casse pensioni” aziendali**

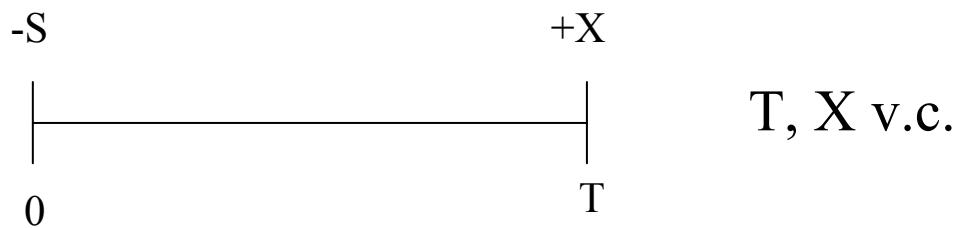
Comprendono:

- pensioni di anzianità e vecchiaia
- pensioni ai superstiti
- pensioni di invalidità
- prestazioni in caso di infortuni professionali
- prestazioni in caso di malattia

Operazione aleatoria

Scambio di importi monetari contro importi monetari, che si protrae in successivi istanti di tempo, gli importi e/o gli istanti essendo variabili aleatorie

Operazione aleatoria semplice:



Elementi di
differimento (*fin.*)
incertezza (*prob.*)

Assicurazione sulla vita

Contratti in cui l'assicurazione si impegna a pagare somme in denaro in istanti futuri al verificarsi di eventi connessi con la vita umana, dietro il pagamento di un premio

L'aleatorietà è indotta dall'incertezza su eventi relativi alla vita umana

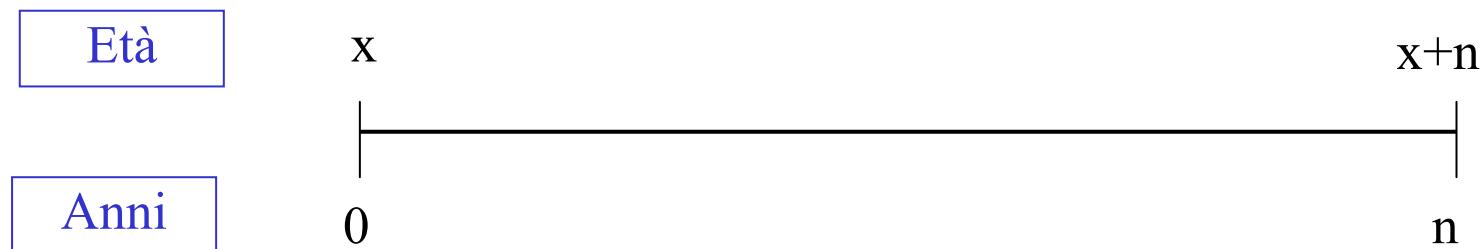
Durata aleatoria di vita

- T_0 variabile aleatoria che esprime la *durata aleatoria di vita* di un individuo (T =testa) alla nascita (età 0)
 - $F_0(x) = \text{prob}(T_0 \leq x) = {}_{/x}q_0$
 - $\ell(x) = 1 - F_0(x) = \text{prob}(T_0 > x) = 1 - {}_{/x}q_0 = {}_xp_0$
funzione di sopravvivenza
- T_x variabile aleatoria che esprime la *durata aleatoria di vita* di un individuo di età x .

Probabilità di vita e di morte

- $n p_x = \text{prob}(T_x > n)$ probabilità che un individuo di età x sia vivo all'età $x+n$
- ${}_n q_x = \text{prob}(T_x \leq n)$ probabilità che un individuo di età x muoia prima di raggiungere l'età $x+n$, ossia muoia entro n anni

$$n p_x + {}_n q_x = 1$$



Probabilità di vita e di morte

- per $n=1$
 - p_x tasso annuo di sopravvivenza
 - q_x tasso annuo di mortalità
- $\frac{q_x}{p_x} = \text{prob}(k < T_x \leq k+n)$ probabilità che un individuo di età x muoia tra k e $k+n$ anni (tra l'età $x+k$ e $x+k+n$), cioè muoia entro n anni a partire dall'età $x+k$
- $\frac{q_x}{p_x} = \text{prob}(n < T_x \leq n+1)$ probabilità che un individuo di età x muoia tra n e $n+1$ anni

Tavole

Tavole di sopravvivenza e di mortalità

- Forniscono per tutta la popolazione le probabilità di vita e di morte
- Suddivise per classi (uomini e donne) e per sottoclassi (fasce di età)
- Redatte dall'ISTAT

Tavole di mortalità

- Rischio normale
 - fattori normali (età, sesso)
- Rischio aggravato o tarato
 - fattori biologici
 - fattori occupazionali
 - fattori ambientali
 - Probabilità di decesso aggravate
 $=f$ (probabilità “normali” q_x)
 - aggravamento “moltiplicativo” $\rightarrow q^{(m)}_{x+t} = (1+k)q_{x+t}$
 - aggravamento “additivo” $\rightarrow q^{(a)}_{x+t} = hq_x + q_{x+t}$
 - aggravamento “decrescente”

Selezione

- **Caso vita**
 - Il contraente stipula la polizza se ritiene che la mortalità dell'assicurato sia \leq a quella della tavola servita per il calcolo del premio
 - Selezione fatta dagli assicurati
- **Caso morte**
 - L'assicurazione stipula il contratto se ritiene che l'assicurato è in buone condizioni di salute
 - Selezione fatta dalla compagnia

Terminologia

- Prestazione
- Premio
 - Premio unico
 - Premio periodico o ricorrente
- Assicurato: cui si riferiscono gli eventi oggetto dell'assicurazione
- Contraente: stipula il contratto e paga il premio
- Beneficiario: cui vengono (eventualmente) pagate le somme assicurate

Tipologie contratti

- Assicurazioni o contratti caso vita
- Assicurazioni o contratti caso morte
- Assicurazioni miste

→ La prestazione dell'assicuratore dipende dalla durata aleatoria di vita di un'unica testa assicurata

Caso vita

- Le prestazioni dipendono dall'evento che l'assicurato sia in vita ad una certa data
- Pagamento di un capitale se la testa assicurata raggiunge in vita una certa età o di una rendita da una certa età
- Finalità: coprire il rischio di scarse disponibilità finanziarie in caso di sopravvivenza ad una certa epoca osia di costituire una disponibilità finanziaria in caso di vita ad un'epoca stabilita.

Assicurazioni in caso di vita

- Capitale differito
- Rendita vitalizia
- Rendita vitalizia differita
- Rendita vitalizia temporanea

Caso morte

- Le prestazioni dipendono dall'evento “morte” dell'assicurato
- Pagamento ai beneficiari di un capitale qualora il decesso avvenga entro un fissato intervallo di tempo (ass. “temporanee”) o in qualunque epoca esso avvenga (ass. “a vita intera”)
- Finalità: coprire il rischio di morte e relative conseguenze finanziarie

Assicurazioni in caso di morte

- Assicurazione elementare
- in caso di morte “a vita intera”
- differita in caso di morte
- temporanea in caso di morte
- Assicurazione di annualità

Assicurazioni miste

- Si copre il rischio di morte e contemporaneamente ci si garantisce un capitale o una rendita in caso di sopravvivenza
- Combinazioni degli altri due tipi

Assicurazioni miste

- Mista semplice o ordinaria
- Doppia mista (caso di mista combinata)
- Mista a capitale raddoppiato

- Assicurazione a termine fisso

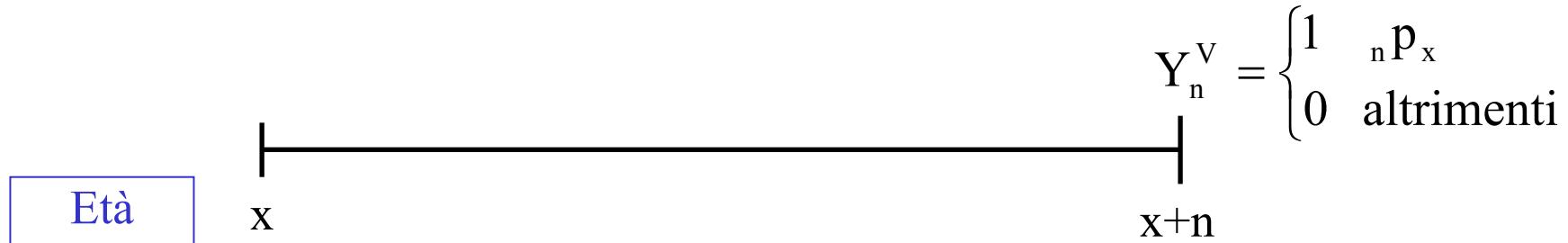
Composizione contratti assicurativi

- Le varie forme assicurative possono essere definite come combinazioni lineari dei due tipi elementari
- I premi risultano allora combinazioni lineari dei premi relativi alle assicurazioni elementari (in virtù dell'additività della speranza matematica)

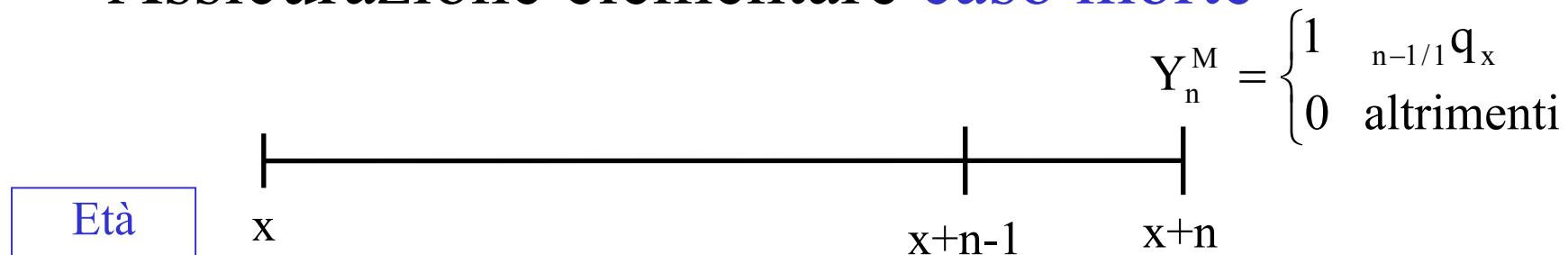
Contratti assicurativi elementari

Formalizzazione

- Assicurazione elementare **caso vita** (Capitale differito)



- Assicurazione elementare **caso morte**



Valutazione contratto

Criterio della *speranza matematica*

Il prezzo (premio) è il valore attuale della speranza matematica della prestazione aleatoria futura Y_n :

$$E_0(Y_n) = E(Y_n) (1+i)^{-n}$$

$E_0(Y_n)$ è il **premio unico puro** del contratto assicurativo

- *Premio*: prezzo
- *Unico*: pagato in un'unica soluzione
- *Puro*: non tiene conto dei carichi esplicativi

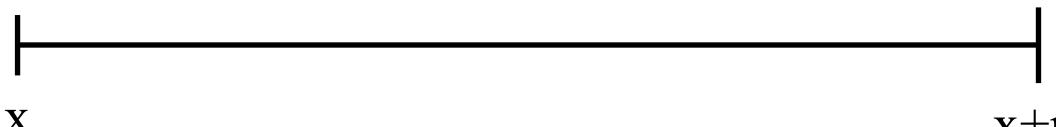
Basi tecniche

- Demografica
 - Distribuzione di probabilità della durata aleatoria residua di vita T_x (p_x e q_x)
- Finanziaria
 - Tasso tecnico (i) al quale attualizzare le prestazioni. Nel definirlo si determina la legge di equivalenza intertemporale

Basi tecniche del **primo ordine** → Quelle impiegate in valutazioni aventi per fine il calcolo del premio

Capitale differito

- Assicurazione elementare **caso vita**
- Capitale differito di n anni su una testa di età x è l'impegno, considerato all'epoca in cui l'individuo compie l'età x , di corrispondere dopo n anni, se la testa sarà in vita, un capitale stabilito, che si suppone unitario.

$$Y_n^V = \begin{cases} 1 & \text{se } x+n \text{ è in vita} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$


- $E_0(Y_n^V) = E(Y_n^V)v^n = (1 \cdot {}_n p_x + 0 \cdot {}_{n+1} q_x)(1+i)^{-n} = v^n {}_n p_x = {}_n E_x$
- Valore attuale in senso demografico e finanziario all'età x di un capitale unitario esigibile all'età $x+n$ in caso di vita

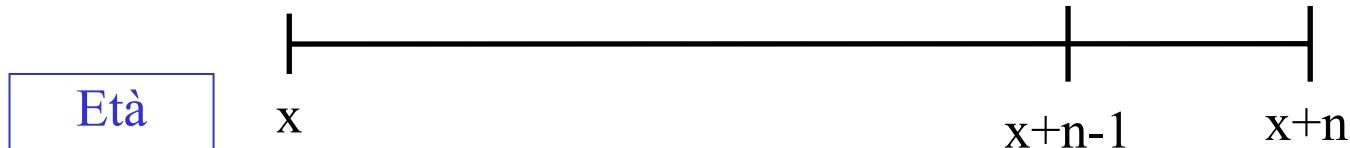
Fattore di sconto demografico

- ${}_nE_x = (1+i)^{-n} {}_n p_x = v^n {}_n p_x$
- $1/{}_nE_x$ montante in senso demografico e finanziario all'età $x+n$ di un capitale unitario versato all'età x
- ${}_{m+n}E_x = {}_mE_x \cdot {}_nE_{x+m} \rightarrow$ scindibilità

Assicurazione elementare caso morte

- è l'impegno, con riferimento ad una testa di età x , di corrispondere un capitale stabilito, che si suppone unitario, dopo n anni, se l'individuo morirà tra le età $x+n-1$ e $x+n$

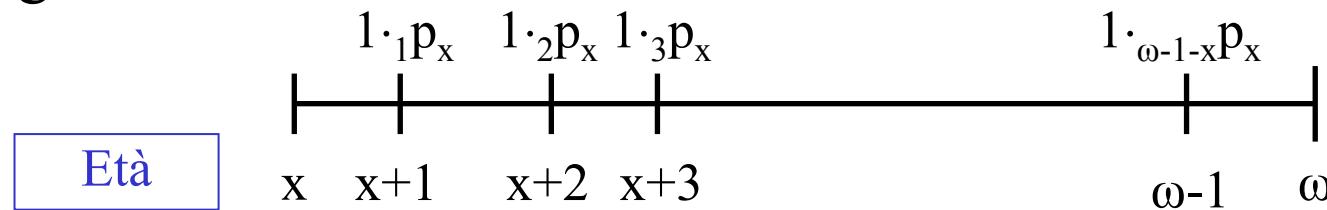
$$Y_n^M = \begin{cases} 1 & \text{se } x+n-1 \text{ è morto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $E_0(Y_n^M) = E(Y_n^M)v^n = [1 \cdot {}_{n-1/1}q_x + 0 \cdot (1 - {}_{n-1/1}q_x)]v^n = v^n {}_{n-1/1}q_x = {}_{n-1/1}A_x$

Rendita vitalizia posticipata

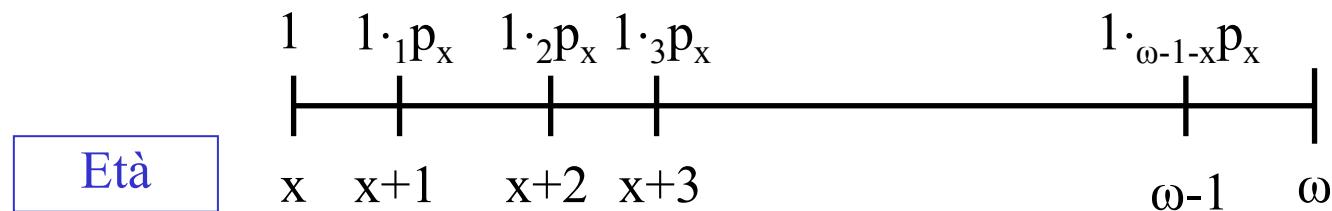
- Annualità vitalizia immediata, unitaria, posticipata, su una testa di età x
- è l'impegno di corrispondere una rendita immediata, unitaria, annua, posticipata (quindi con prima rata all'età $x+1$), tale che ogni pagamento avvenga solo se la testa sopravvive all'epoca del pagamento stesso.



- $E_0(Y^V) = \sum E(Y_h^V)v^h = (1 \cdot {}_1 p_x)v + (1 \cdot {}_2 p_x)v^2 + \dots + (1 \cdot {}_{\omega} p_x)v^{\omega-1-x}$
 $= {}_1 E_x + {}_2 E_x + \dots + {}_{\omega-1-x} E_x = a_x$
- Principio di composizione dei contratti: portafoglio di contratti elementari caso vita (“capitale differito”)

Rendita vitalizia anticipata

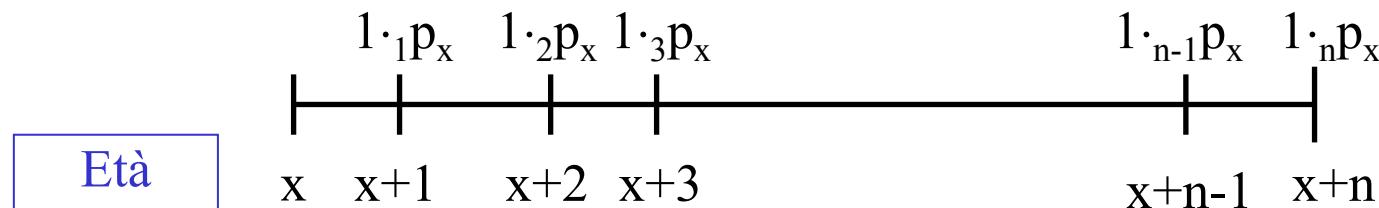
- Annualità vitalizia immediata, unitaria, anticipata, su una testa di età x
- è l'impegno di corrispondere una rendita immediata, unitaria, annua, anticipata (quindi con prima rata all'età $x+1$), tale che ogni pagamento avvenga solo se la testa sopravvive all'epoca del pagamento stesso.



- $1 + {}_1 E_x + {}_2 E_x + \dots + {}_{\omega-1-x} E_x = 1 + a_x = \ddot{a}_x$

Montante demografico finanziario di una annualità vitalizia

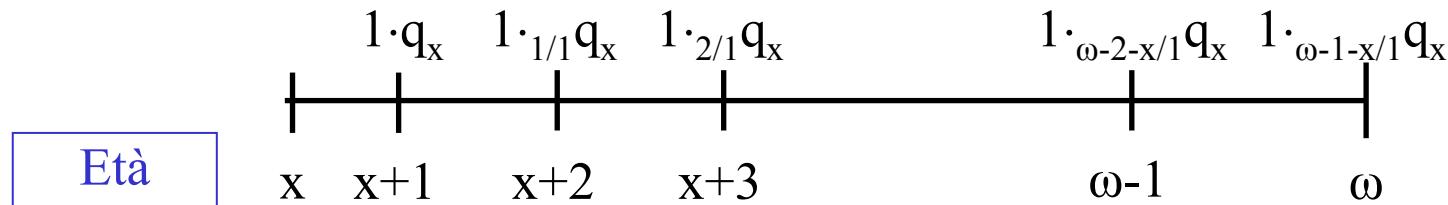
- Montante demografico finanziario di una annualità vitalizia immediata, unitaria, temporanea, posticipata, su una testa di età x
- è la somma S che spetterà in caso di sopravvivenza all'età $x+n$ in cambio dell'impegno di detta annualità.



- ${}_n a_x = S / {}_n E_x \Rightarrow S = {}_n a_x / {}_n E_x$

Caso morte a vita intera

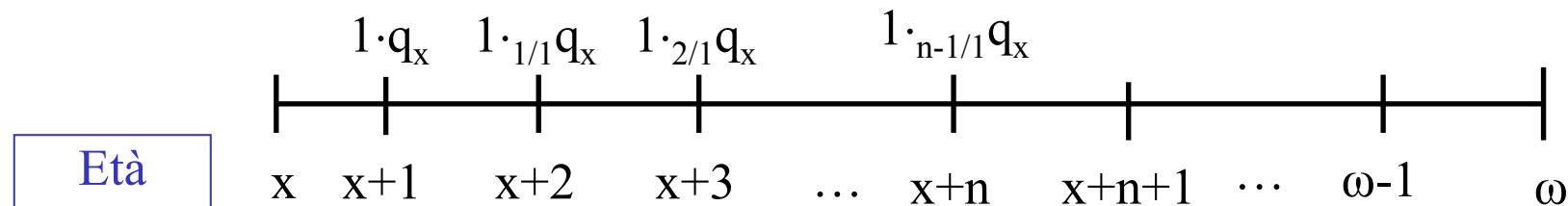
- È l'impegno di corrispondere un capitale unitario alla fine dell'anno in cui avviene il decesso di una testa di età x



- $E_0(Y^M) = \sum E(Y_h^M)v^h = (1 \cdot q_x)v + (1 \cdot {}_{1/1}q_x)v^2 + \dots + (1 \cdot {}_{\omega-1-x/1}q_x)v^{\omega-x}$
 $= {}_{1/1}A_x + {}_{1/1}A_x + \dots + {}_{\omega-1-x/1}A_x = \sum {}_{h-1/1}A_x = A_x$
- Principio di composizione dei contratti: portafoglio di $\omega-x$ contratti elementari caso morte

Caso morte temporanea

- È l'impegno di corrispondere un capitale unitario alla fine dell'anno in cui avviene il decesso di una testa di età x , solo se la morte avviene entro n anni (entro l'età $x+n$)



- $E_0(Y^M) = \sum E(Y_h^M)v^h = (1 \cdot q_x)v + (1 \cdot q_{x+1})v^2 + \dots + (1 \cdot q_{x+n})v^n$
 $= {}_{/1}A_x + {}_{/1}A_x + \dots + {}_{n-1/1}A_x = A_x - {}_nA_x = {}_{/n}A_x$
- Principio di composizione dei contratti: portafoglio di n contratti elementari caso morte

Ass. mista semplice o ordinaria

- è l'impegno di corrispondere un capitale unitario dopo n anni se l'assicurato sarà in vita all'età $x+n$, o alla morte dell'assicurato se questo muore prima dell'età $x+n$.
- $E_x + A_{x+n} = A_{x \rightarrow n}$
- Principio di composizione dei contratti: **portafoglio** composto da un “capitale differito di n anni” e una “temporanea in caso di morte”

Premio puro e lordo

- Premio puro

- Se come impegni della compagnia (a cui far fronte con i premi) si considerano solo quelli nei confronti del contraente

La compagnia con i premi puri riesce a far fronte agli impegni verso gli assicurati (un gran numero di assicurati) **se** la mortalità effettivamente verificatasi e il tasso di mercato sono uguali a quelli stabiliti per il calcolo dei premi

- Premio lordo (o caricato) (o di tariffa)

- E' il premio che effettivamente si paga, che tiene conto della copertura di impegni diversi da quelli nei confronti degli assicurati e dello sfavorevole andamento della mortalità e del tasso di interesse

Caricamento

- Caricamento implicito
 - Basi tecniche prudenziali
 - ✓ i basso
 - ✓ tavola a forte mortalità (ass. in caso di morte)
 - ✓ tavola a bassa mortalità (ass. in caso di vita)
- Caricamento razionale
 - Spese iniziali (spese di acquisizione)
 - Spese di gestione
 - ✓ Spese di incasso premi
 - ✓ Spese generali di amministrazione

Premio unico e periodico

- Premio unico
 - Un solo premio alla stipula del contratto
 - Uguale al valore attuale medio degli impegni dell'assicuratore
- Premio periodico
 - Più premi uguali o variabili a intervalli uguali di tempo pagati anticipatamente a partire dalla data di stipula e subordinatamente a determinate condizioni di sopravvivenza dell'assicurato
 - Il valore attuale medio dei premi periodici deve essere uguale al valore attuale medio degli impegni dell'assicuratore

Premi periodici

P costante per s anni (a condizione che la testa sia in vita) deve soddisfare:

$$P_{/s} \ddot{a}_x = U \Rightarrow P = U / {}_{/s} \ddot{a}_x$$

P costante per tutta la vita (finché la testa è in vita) deve soddisfare:

$$P \ddot{a}_x = U \Rightarrow P = U / \ddot{a}_x$$

Premi naturali

- Sono quei premi (puri) che coprono esattamente gli impegni dell'assicuratore nei confronti del contraente, relativi all'anno stesso a cui competono
- $P_t^{(N)}$: premio naturale pagato in $t-1$ che copre esattamente l'impegno dell'assicuratore per il t -esimo anno
- Garantiscono l'equità dell'operazione anche su tutta la durata contrattuale:

$$U = P_1^{(N)} + {}_1E_x P_2^{(N)} + {}_2E_x P_3^{(N)} + \dots$$

Valutazione in t del contratto assicurativo

- Polizza in vigore dopo t anni dalla stipula del contratto, cioè in vigore al tempo t assumendo come tempo 0 quello della stipula
- $t =$ istante di valutazione che supponiamo intero ($t =$ antidurata)
- Premi puri e impegni coperti da tali premi

Valutazione in t del contratto assicurativo



Riserva matematica “pura”

Riserva matematica

in $t > 0$

- Valore attuale medio delle prestazioni future della Compagnia
 - Valore residuo del debito che la Compagnia ha nei confronti degli assicurati
- L'attuario certifica che il valore della riserva è determinato secondo i corretti criteri di valutazione

Riserva matematica prospettiva

$$V_t^{(P)} = \text{Prest}[t,n] - \text{Premi}[t,n]$$

- Valutazione che riassume i movimenti futuri
- Fabbisogno di un'operazione assicurativa sulla vita
- $V_t^{(P)} + \text{Premi}[t,n] = \text{Prest}[t,n] \Rightarrow V_t^{(P)}$ importo che, se l'assicurazione non fosse già stipulata sarebbe equo pagare (se positivo all'assicuratore) in t per ivi istituire la situazione assicurativa

Riserva matematica retrospettiva

$$V_t^{(R)} = \frac{\text{Premi}[0,t] - \text{Prest}[0,t]}{tE_x}$$

- Valutazione che riassume i movimenti passati
- $\text{Premi}[0,t] = \text{Prest}[0,t] + V_t^{(R)} t E_x \Rightarrow V_t^{(R)}$ importo atto a garantire l'equilibrio (in senso attuariale) tra le prestazioni delle due parti relative all'intervallo $(0,t)$
- È l'importo che sin dall'inizio si sarebbe pouto convenire di corrispondere all'assicurato in caso di vita dopo un tempo t dalla stipula, ferme restando tutte le prestazioni precedenti t e venendo a cadere quelle seguenti t . È un “prezzo di uscita” dall'assicurazione”.

Equità contratto

Si consideri un contratto stipulato in 0 di durata n

- $\text{Prest}[0,n] = \text{Premi}[0,n]$
- $\text{Prest}[t,n] \neq \text{Premi}[t,n]$
 - infatti: $\text{Prest}[t,n] = \text{Premi}[t,n] + V_t^{(P)}$
- $\text{Prest}[0,t] \neq \text{Premi}[0,t]$
 - infatti: $\text{Premi}[0,t] = \text{Prest}[0,t] + V_t^{(R)} E_x$

Relazione tra $V_t^{(P)}$ e $V_t^{(R)}$

$V_t^{(P)} = V_t^{(R)}$ se:

- Il gruppo assicurato non è soggetto a trasformazioni
 - ciò accade per le usuali forme a una testa, mentre può non verificarsi nelle assicurazioni su 2 o più teste
- Si utilizzano le stesse basi tecniche nelle due valutazioni
 - che dovranno coincidere con quelle usate per la determinazione dei premi (basi tecniche del 1° ordine)

Segno riserva

- $V_0 = 0$ alla stipula del contratto per l'equità
- $V_t = 0$ all'inizio di ogni anno se il contratto è a premi naturali
- $V_t > 0$ se è a premio unico ($V_t^{(P)} = \text{Prest}[t,n]$)
- $V_t > 0$ se il contratto è “liberato” in $s < t$
- $V_t > 0$ se è a premi costanti essendo a rischio crescente (premi naturali crescenti)
- $V_t < 0$ se è a premi costanti essendo a rischio decrescente (premi naturali decrescenti)
- $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t^{(P)} = 1$

Bilancio – Stato Patrimoniale

ATTIVO	PASSIVO
Beni immobili	Riserva Matematica
Titoli	Debiti
Liquidità	Capitale netto
Crediti	→ capitale sociale → riserve legali → riserve patrimoniali → utile d'esercizio

Bilancio – Profitti e Perdite

PERDITE	PROFITTI
$\sum V_{t+1} = \text{RM dei contratti}$ in vigore alla fine di $(t, t+1)$	$\sum V_t = \text{RM dei contratti in vigore all'inizio di } (t, t+1)$
S = somme pagate	$\sum P$
$\sum (\alpha + \beta + \gamma) = \text{spese}$	I = reddito ricavato, nell'esercizio, dal patrimonio

- schematicamente
- solo per quanto riguarda la gestione assicurativa

Riferimenti bibliografici

Ermanno Pitacco

“*Elementi di matematica delle assicurazioni*”

Ed. LINT - Trieste