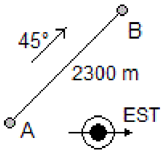
# *Le funzioni circolari*

*... e alcuni moti*



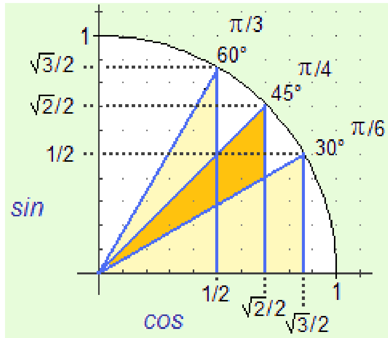
## *0. Introduzione*

In questa scheda approfondiamo lo studio delle funzioni seno e coseno. Se vuoi rivedere il loro significato puoi rileggere la scheda ➔ *La matematica e lo spazio - 2* prevista per la classe 2ª in cui sono state introdotte. Un esercizio per richiamarlo:




$\boxed{1}$ Una nave si sposta di 2300 m nella direzione 36° est-nord. Di quanto è avanzata in direzione est? Di quanto in direzione nord?

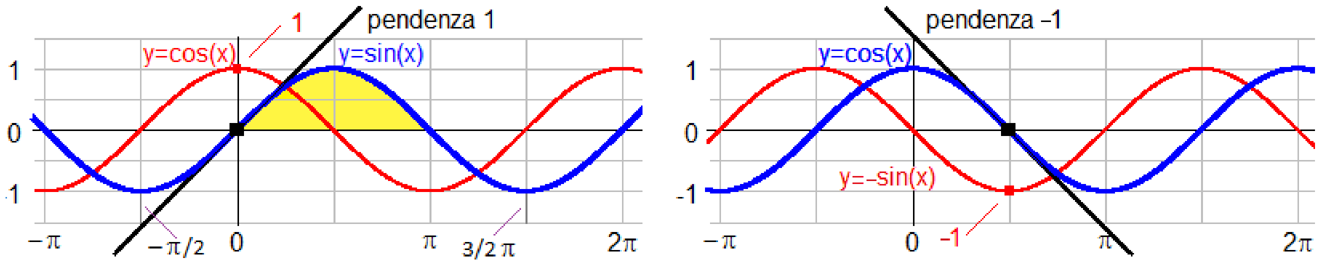
La figura a lato richiama il valore del seno e del coseno di alcuni angoli d'uso frequente, che è opportuno ricordare a memoria e, nello stesso tempo, saper ricavare facilmente, tenendo presente che si tratta di triangoli rettangoli aventi ipotenusa lunga 1 e i cateti disposti sugli assi:




- sin(30°) = sin(π/6) = 1/2  in quanto il triangolo individuato è metà del triangolo equilatero ottenuto per ribaltamento attorno al cateto orizzontale:  il cateto verticale è dunque metà dell'ipotenusa;
- sin(45°) = sin(π/4) = √2/2  in quanto il triangolo individuato è metà quadrato avente diagonale lunga 1;
- sin(60°) = sin(π/3) = √3/2  in quanto il triangolo rettangolo individuato ha ipotenusa lunga 1 e un cateto lungo 1/2:  l'altro è lungo √(1-1/4) = √3/2;
- cos(60°) = sin(30°),  cos(45°) = sin(45°),  cos(30°) = sin(60°).

## *1. Derivazione delle funzioni seno e coseno*

Nel ➔ **§6** della scheda *La derivazione di funzioni* abbiamo rivisto il significato delle funzioni *seno* e *coseno* e spiegato come si calcolano le derivate di tali funzioni.




Curve che abbiano andamento come quello dei grafici della funzione seno (o coseno), eventualmente dilatati, traslati o ruotati, vengono detti *sinusoidi.*

## *2. Integrazione delle funzioni seno e coseno*

Se non l'hai già fatto, affronta ➔ il §4 della scheda *Gli integrali* in cui viene spiegato come si calcolano gli integrali di tali funzioni. Comunque vediamo come calcolare l'area della superficie colorata in giallo nella figura di sopra, che sta tra il grafico di ***sin***, l'asse x e i punti di ascissa 0 e π.

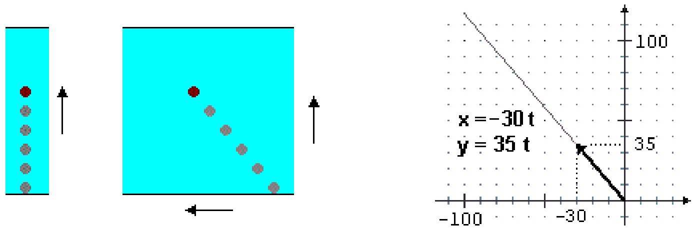
Posso tener conto che la figura a destra ricorda che la derivata di ***cos*** è **−*sin***, e che quindi l'antiderivata di ***sin*** è **−*cos***, ossia **D**(−cos)=sin.  Per calcolare l'area della superficie, ossia $_0\!\int^{\pi}$ **sin**,  occorre fare la differenza dei valori che l'antiderivata assume in π e in 0, ossia come abbiamo visto:  −cos(π) − −cos(0) = cos(0)−cos(π) = 1+1 = 2.

## *3. Alcuni moti*

Nelle immagini animate a cui ti puoi collegare dai seguenti tre link viene introdotto, in breve, quello che vedremo in questo paragrafo. Puoi osservarle (senza preoccuparti di capirle in dettaglio) per introdurti all'argomento.  **Uno**: il movimento perpendicolare alla riva di chi sta attraversando un canale d'acqua fermo e quello di chi lo sta facendo in un canale d'acqua che sta scorrendo.  **Due**: il movimento di un oggetto che segue una traiettoria circolare.  **Tre**: il movimento di un uomo che si allontana dal centro di una giostra che sta ruotando. Nel seguito discuteremo in breve con quali strumenti matematici possono essere descritti questi movimenti.

***Uno***.  L'idea della ***traiettoria*** di un punto che si muove con continuità, senza salti, ossia della linea a tratto continuo che possiamo ottenere facendo scorrere la punta di una penna su un foglio senza mai staccarla da esso, ci guida nel fissare un particolare concetto di curva, che chiameremo ***curva continua***. Questa è la nostra idea ispiratrice, anche se, come abbiamo ➔ visto in altre occasioni, ci saranno delle differenze tra questo concetto *intuitivo* e la sua "controparte" *matematica*.

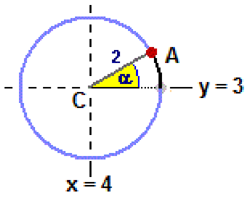
Partiamo da un esempio. Una barca attraversa un canale dirigendosi con velocità costante perpendicolarmente alla riva. Il suo moto è descritto a sinistra, nel caso in cui l'acqua del canale sia ferma. Se in seguito alla apertura di una chiusa si forma una corrente tale che l'acqua avanzi con la stessa velocità in tutti i punti del canale, la barca, senza interventi da parte del guidatore, cambia traiettoria: vedi figura al centro. Una situazione analoga si verifica se stando su un tapis roulant ci spostiamo perpendicolarmente alla direzione di avanzamento: per chi osserva la scena da fuori il nostro movimento non è perpendicolare al tapis roulant.




Come posso descrivere il moto della barca se essa, a canale fermo, si muove alla velocità di 35 m/min e se il canale ha una corrente di 30 m/min verso sinistra? Posso fissare un sistema di riferimento come quello a lato, dove x e y esprimono metri e t esprime minuti, e considerare il sistema:

$x = -30\,t$ AND $y = 35\,t$, ovvero, più in breve: $P = (-30\,t, 35\,t)$

Al variare di t ho l'insieme dei punti che formano la traiettoria della barca. Questa è una *traiettoria rettilinea,* e potrei descriverla anche come il grafico della funzione $x \to -35/30\,x$ ovvero mediante l'equazione $y = -35/30\,x$.




***Due***. Vediamo come descrivere in modo simile una *traiettoria circolare,* quella di centro C = (4,3) e raggio 2, illustrata qui a destra. Se A sta sul cerchio e il vettore CA ha direzione α, le componenti di questo sono $\Delta x = 2\cdot\cos(\alpha)$, $\Delta y = 2\cdot\sin(\alpha)$, per cui $A = (4 + 2\cdot\cos(\alpha), 3 + 2\cdot\sin(\alpha))$.

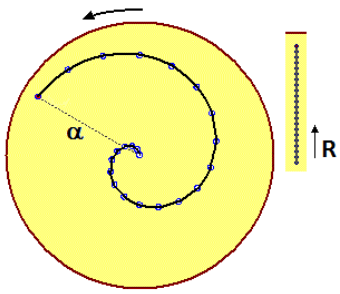
Al variare di α tra 0 e 2π, ovvero tra 0° e 360° (1° = π/180), le equazioni seguenti descrivono il cerchio:

$\{\ x = 4 + 2\cos(\alpha),\quad y = 3 + 2\sin(\alpha)\ \}$

Questa curva non avremmo potuta descriverla come grafico di una funzione; avremmo tuttavia potuta descriverla con l'equazione $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$.

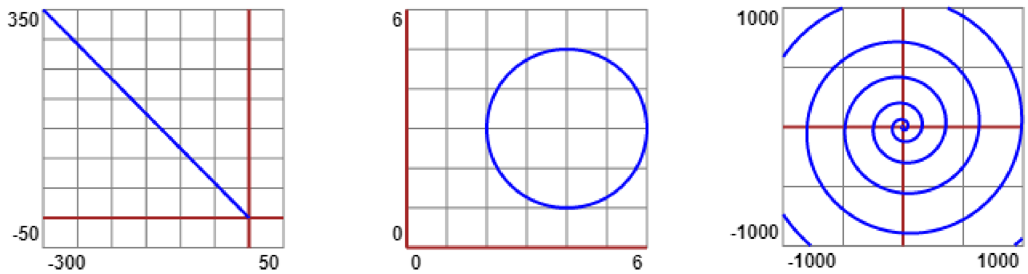
***Tre***. Consideriamo un'altra situazione. Un uomo si allontana dal centro di una piattaforma girevole procedendo in modo rettilineo e con velocità costante. Se la piattaforma ha una velocità di rotazione costante l'uomo, visto dall'alto, descrive una *traiettoria a spirale,* come illustrato qui a destra.

In pratica, se indico con R la distanza dell'uomo dal centro della piattaforma e con α la direzione rispetto al centro della sua posizione, dato che al passar del tempo sia R che α crescono con velocità costante, ho che R varia proporzionalmente ad α. Supponiamo che R sia espresso in metri e che sia pari 0.6·α dove α in radianti. Allora $R = 0.6\cdot\alpha$ è l'equazione che descrive il movimento dell'uomo.




Queste descrizioni, in coordinate sia *cartesiane,* in questo paragrafo indicate con x,y, che *polari* (➔ *La matematica e lo spazio - 2*), qui indicate con R e α, vengono dette ***parametriche***. Infatti viene impiegata una terza variabile (t), chiamata *parametro,* oltre alle due usate per individuare la posizione dei punti che formano la figura [siamo di fronte a un nuovo uso della parola *parametro* rispetto a quello fatto discutendo della ➔ risoluzione di equazioni].

Ecco come realizzare le curve in forma parametrica con degli script: **uno**, **due**, **tre**.




## 4. *Esercizi*

**e1** Sia $P(t) = (\ x(t), y(t)\ )$ la posizione che un oggetto ha (rispetto a un sistema di coordinate x,y fissato) all'istante t (espresso in secondi assumendo come riferimento un dato istante fissato). Sappiamo che l'oggetto si muove lungo una traiettoria rettilinea, che all'istante t = 0 ha la posizione P(0) = (1, 1) e che all'istante t = −4 (ossia 4 secondi prima) ha la posizione P(−4) = (2, −1).
Traccia la traiettoria dell'oggetto.
Descrivi la traiettoria dell'oggetto mediante una coppia di equazioni:
x(t) = …  y(t) = …
Descrivila, poi, mediante una equazione del tipo y = f(x).

**e2** Una particella si muove secondo le seguenti equazioni parametriche. Trova la pendenza della sua traiettoria in un generico punto. Cerca di tracciare la traiettoria della particella e controlla le tue soluzioni aiutandoti col computer.
$x = 3t,\ y = -2t$

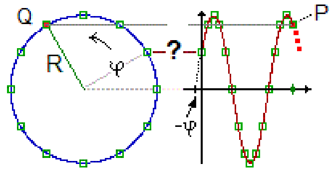
**e3** Una particella si muove secondo le seguenti equazioni parametriche. Trova la pendenza della sua traiettoria in un generico punto. Cerca di tracciare la traiettoria della particella e controlla le tue soluzioni aiutandoti col computer.
$x = t^3 - t,\ y = t$

**e4** Traccia nel piano x,y il grafico di $\{x = -1+5\cdot\cos(t),\ y = 3+5\cdot\sin(t)\}$ al variare di t tra i numeri reali.

**e5** Traccia nel piano x,y il grafico di $\{x = -1+2\cdot\cos(u),\ y = 3+4\cdot\sin(u)\}$ al variare di u tra i numeri reali.

**e6** Aiutandoti col software traccia le curve così descritte in forma polare:
$R = \cos(3a)$, $0 \le a \le \pi$;   $R = 1+2\cdot\cos(a)$, $0 \le a \le 2\pi$;   $R = 1-\cos(a)$, $0 \le a \le 2\pi$

**e7** Una formica si allontana dal centro di una piattaforma circolare muovendosi lungo un raggio alla velocità di un 1 cm al secondo. Posizioniamo un sistema di riferimento monometrico con origine nel centro del cerchio e asse x su tale raggio. Fissiamo le scale sugli assi in modo che l'unità corrisponda ad 1 cm. Nel momento in cui la formica parte la piattaforma incomincia a ruotare in verso antiorario a velocità costante, compiendo un giro in 10 secondi. Descrivi in forma parametrica la traiettoria descritta dalla formica.




**e8** Sia $F: x \to R\cdot\sin(\omega x + \varphi)$. Quanto vale il periodo di F? Quanto vale l'ordinata del punto di intersezione del grafico di F con l'asse verticale?

**1**) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
*sinusoide* (§1),    *descrizione parametrica di una curva* (§3).

**2**) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

**3**) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

**script:** piccola CT  grande CT  isto  isto con %  boxplot  striscia  100  ordina  Grafici  GraficD  divisori  Indet  distanza  Triang  eq.polinomiale  eq.nonPolin  sistemaLin  moltPolin  sempliciEq  divisori  fraz/mcd  opFraz  SumPro  sin  LenArc  Poligono  Circ3P  Inscr3P  IntegrPol  Istogramma  RandomNum  curva1  curva2  curva3