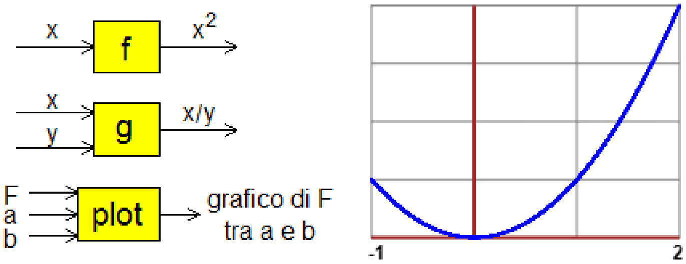
Funzioni trigonometriche e funzioni periodiche - Sintesi

Tra gli oggetti matematici che abbiamo trattato in questo corso, le funzioni hanno un ruolo di particolare importanza. Una **funzione**, per dirla molto in breve, è un modo per associare ad un input appartenente ad un insieme **I** (consistente in una qualche collezione di oggetti matematici) o un unico output appartenente ad un insieme **O** (che, a sua volta, è una qualche collezione di oggetti matematici) o nessun output. L'insieme degli input a cui la funzione associa un output viene chiamato **dominio** della funzione.

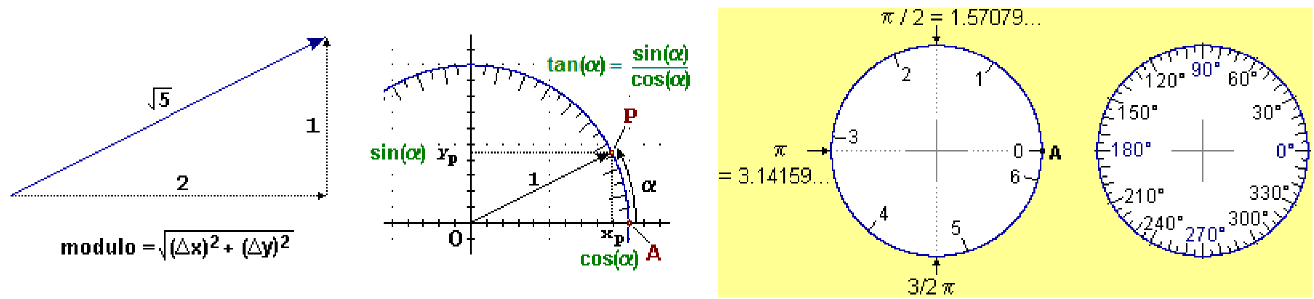
Facciamo tre esempi. **f**: $x \to x^2$ (per cui ad es. **f**(-2) = 4), **g**: $(x,y) \to x/y$ (ad es. **g**(3,4) = 0.75), **Plot** che a (F, *a*,*b*) associa il **grafico** di F **tra** *a* e *b*.

f e **g** sono funzioni ad input ed output numerici. La terza è una funzione che ha 3 input: una funzione numerica **F**, un numero ***a*** che rappresenta il primo estremo di un intervallo, un altro numero ***b*** che rappresenta il secondo estremo di quell'intervallo; l'output è un oggetto matematico particolare: un grafico, per l'esattezza il grafico di F sull'intervallo che ha per estremi **a** e **b**. Nella figura sottostante a destra F è l'elevamento al quadrato (cioè **f**), *a* = -1, *b* = 2.

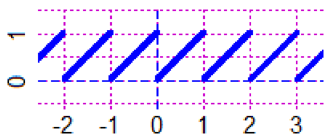


Abbiamo poi concentrato l'attenzione sulle funzioni da **R** in **R**, cioè le funzioni che, come la **f** dell'esempio precedente, hanno come input un numero reale e come output un numero reale. In due precedenti schede di ripasso abbiamo preso in considerazione, tra l'altro, le funzioni polinomiali e quelle esponenziali. In questa scheda rivediamo, rapidamente, le funzioni trigonometriche. Le funzioni trigonometriche di uso più frequente sono le funzioni seno, coseno, tangente.

Le funzioni trigonometriche hanno una particolarità: sono periodiche. Ciò dipende dal fatto che il loro input è un numero reale che descrive una direzione, e le direzioni si ripetono. Se a partire da 0 percorriamo la retta nell'una o nell'altra direzione, incontriamo sempre nuovi punti, sempre più distanti da 0. Abbiamo chiamato cerchio goniometrico il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine: se lo percorriamo nell'una o nell'altra direzione, ripassiamo periodicamente per gli stessi punti. La prossima figura mostra, a sinistra, come si trova la direzione di un vettore: si riporta, applicato nell'origine, il versore, cioè il vettore di modulo 1, che ha la stessa direzione. La direzione α del versore OP è la lunghezza dell'arco AP. A destra vediamo il confronto tra le direzioni "matematiche" indicate sul cerchio goniometrico, e quelle "tradizionali" riportate sul goniometro.

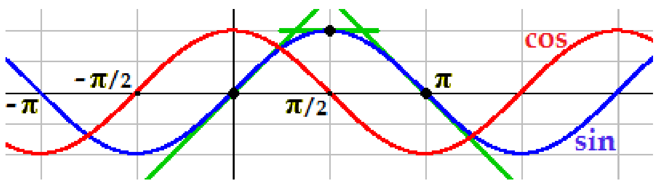


Il grado è la 180ª parte di π: 1° = π/180. Quindi, per esempio: 30° = 30·π/180 = π/6.
Una qualunque direzione x e la direzione x+2π coincidono (non come numeri, ma come direzioni). Quindi, ad esempio, sin(7) e sin(7+2π), sin(7+6π) e sin(7−2π) coincidono.



Abbiamo visto anche esempi di altre funzioni periodiche. Ad es. a sinistra è tracciata parte del grafico della funzione che ad un numero associa la sua parte frazionaria o, meglio, il numero meno il massimo intero minore o eguale ad esso.

Poiché la funzione *sin* è periodica, anche la sua pendenza ha andamento periodico: se in x il grafico di *sin* ha una certa pendenza, la stessa pendenza deve avere in x+2π. Osserviamo inoltre (vedi figura seguente) che in 0 il grafico di *sin* ha pendenza 1, in π/2 ha pendenza 0, in π ha pendenza −1, ossia in tali punti ha gli stessi valori che assume la funzione *cos.*

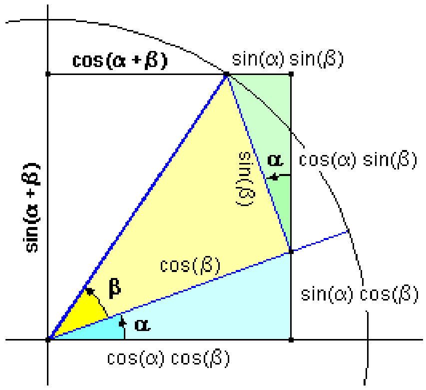


Si percepisce immediatamente che il grafico rosso non è altro che il grafico della funzione ***cos***. Si può effettivamente dimostrare che ***D(sin) = cos***. Possiamo studiare la cosa anche con lo script **deriv_sin**, che traccia in blu il grafico di *sin* e in rosso il grafico della sua derivata (sull'asse x sono segnati i radianti, non i gradi).

Analogamente, lo script **deriv_cos** illustra che ***D(cos) = −sin***.

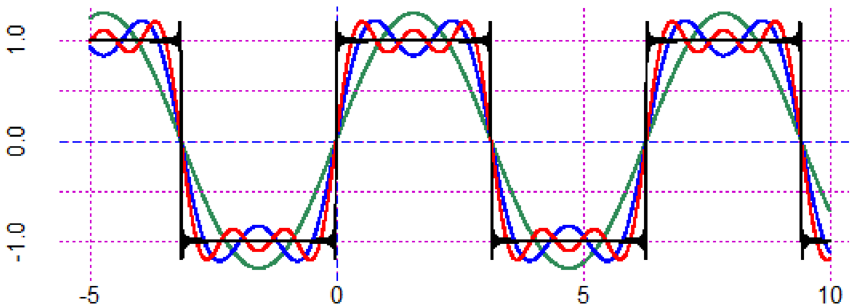
Come mai le *funzioni circolari,* ovvero le funzioni che associano a un numero α l'ascissa o l'ordinata del punto che si intercetta sul cerchio goniometrico procedendo da (0,0) in direzione α, si chiamano *"funzioni **trig**onometriche*?

La ragione è che le funzioni circolari possono essere utili per affrontare lo studio di alcune proprietà dei triangoli.
Vi sono alcune formule che possono talvolta rivelarsi utili. Ricordiamo solo le *formule di addizione* (da cui si possono dedurrre le altre formule) che si dimostrano facendo riferimento alla prossima immagine:



Voglio trovare cos(α+β).
Rappresento, sul cerchio goniometrico, l'angolo α e, subito dopo, l'angolo β, come nella figura. Traccio il triangolo rettangolo colorato in giallo (basta che tracci la perpendicolare al primo lato di β dal punto in cui il secondo lato di β incontra il cerchio). I suoi cateti sono lunghi cos(β) e sin(β).
Traccio il triangolo rettangolo colorato in verde, che ha l'angolo in basso eguale ad α. Il cateto opposto ad α è pari alla lunghezza della sua ipotenusa moltiplicata per sin(α): sin(α)·sin(β).
Analogamente il cateto orizzontale del triangolo rettangolo celeste è lungo cos(α)·cos(β).
Dunque cos(α+β) = cos(α)·cos(β) − sin(α)·sin(β).
Analogamente sin(α+β) = sin(α)·cos(β) + cos(α)·sin(β).

Le funzioni seno e coseno permettono di approssimare, opportunamente sommate, qualsiasi funzione periodica. Ecco il grafico di x → sin(x)·4/π (verde), di x → (sin(x)+sin(3x)/3)·4/π (blu), e di x → (sin(x)+sin(3x)/3+…+sin((2*n*+1)x/(2*n*+1))·4/π per *n* uguale a 2 (rosso) e a 80 (nero).



In questo caso stiamo approssimando un'*onda quadra*, che è una funzione periodica molto importante nelle applicazioni di tipo elettronico: nel caso considerato abbiamo che, al crescere di *n*, le curve tendono a stabilizzarsi (come si può già vedere molto bene per *n* = 80) su una figura a gradini di altezza 1 e −1 che si ripetono con periodo 2π.

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol Istogramma RandomNum IntGauss AB3dim TabFun ALTRO