I vettori tridimensionali

1. Richiami

Abbiamo già considerato lo spazio tridimensionale; sappiamo, in particolare, come trovare la distanza tra due punti e come realizzare rappresentazioni prospettiche e cartografiche (vedi), come calcolare i volumi di alcuni solidi (vedi). Avete, anche, visto la possibilità di considerare vettori in tre dimensioni (vedi). Soffermiamoci su quest'ultimo aspetto.

Premettiamo una notazione, che può essere utile. Quando si considerano due insiemi A e B, l'insieme delle coppie (x, y) al variare di x in A ed y in B viene indicato A×B. Analogamente, dato un altro insieme C, con A×B×C si indica l'insieme delle terne (x, y, z) al variare di x in A, y in B e z in C. In particolare il piano e lo spazio cartesiani vengono indicati **R**×**R** e **R**×**R**×**R** o, più in breve, $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$. Data la analogia di scrittura con la moltiplicazione tra numeri, A×B viene chiamato *prodotto cartesiano* degli insiemi A e B; non valgono, tuttavia, tutte le proprietà della moltiplicazione tra numeri, ad esempio se A={1,2} e B={5}, A×B è l'insieme delle due coppie (1,5) e (2,5), che è diverso da B×A, costituito dalle due coppie (5,1) e (5,2).

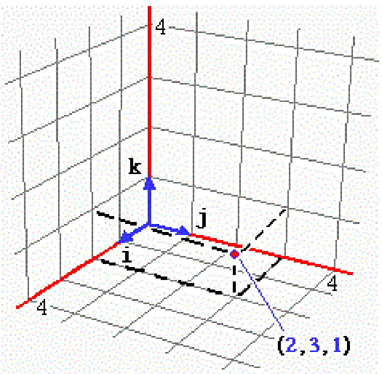
2. I vettori tridimensionali

Per rappresentare e misurare molte grandezze fisiche, come forze o velocità, ci si serve di vettori piani (vedi) solo se queste sono dirette lungo direzioni che stanno tutte nello stesso piano; altrimenti si impiegano vettori tridimensionali.

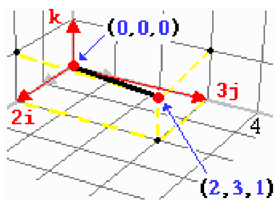
Come abbiamo già visto, possiamo rappresentare i vettori in vari modi: con delle frecce sovrapposte, come differenze tra punti, con delle lettere in corsivo o con delle lettere in grassetto. In questa scheda, quando useremo delle lettere in **grassetto** intenderemo sempre che esse rappresentino dei vettori. Useremo, in particolare, **i**, **j** e **k** per indicare i *versori* degli assi, ossia i vettori lunghi 1 (o vettori **unitari**) diretti come i tre assi coordinati (attenzione: **i** in questo caso rappresenta il versore dell'asse x, non quello dell'asse y, come accade quando si usano i *numeri complessi*, che studieremo successivamente, qui): **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), **k** = (0, 0, 1).

Facendo riferimento alla figura (**A**), i vettori 2**i**, 3**j** e **k** sono i vettori diretti come **i**, **j** e **k** di lunghezza, ordinatamente, doppia, tripla ed uguale ad essi. Il vettore (0,0,0)-(2,3,1) - vedi figura (**B**) - posso rappresentarlo con la somma 2**i**+3**j**+**k**.

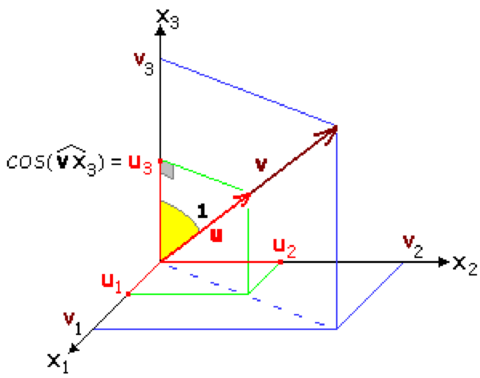
Ricordiamo che la "lunghezza" del vettore **v**, ossia, nel caso precedente, il numero $\sqrt{(2^2+3^2+1)}$ (= $\sqrt{14}$ = 3.741657…), viene chiamata **modulo** di **v**; si usa anche il termine **norma** di **v**. Essa viene indicata |**v**| o ||**v**||. Usando la seconda scrittura, $\|(x, y, z)\| = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$.



(A)



(B)



(C)

Nel seguito considereremo i vettori come "non applicati", ovvero come se tutti fossero applicati nell'origine. In altre parole considereremo due vettori **uguali** se rappresentati da due frecce egualmente dirette ed egualmente lunghe.

(0,0,0) è l'unico vettore di modulo nullo. In modo ovvio si estendono al caso tridimensionale le definizioni già date per il caso bidimensionale, come quelle di *addizione* e *sottrazione*. Il vettore (0,0,0) è l'elemento neutro (vedi) rispetto a questa addizione, e lo indicheremo anche, semplicemente, con **0**.

Ricordiamo che spesso chiameremo ***scalari*** i numeri reali, per distinguerli dai vettori. Useremo la notazione k**v** per indicare il vettore *prodotto di uno scalare* k *per un vettore* **v**, dato da (kv_1, kv_2, kv_3) (se $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$).

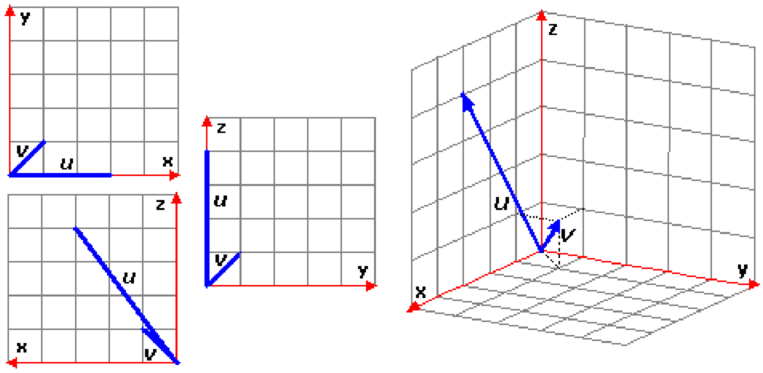
Se **v** ≠ **0** chiamiamo **normalizzazione** di **v** il passaggio a **v** / ||**v**||, ossia al versore diretto come **v**. Le componenti del versore **u** ottenuto normalizzando $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ vengono dette anche **coseni direttori** di **v** in quanto sono dati dal coseno degli angoli che **v** forma con i tre assi coordinati: $u_i = \cos(\angle\, \mathbf{v}\, \mathbf{x}_i)$ (avendo indicato gli assi x, y e z con x_1, x_2 e x_3).

La figura (**C**) illustra il caso di u_3. Con un'analoga costruzione si possono illustrare gli altri due casi.

Si noti che posso scrivere sia $\cos(\angle\, \mathbf{v}\, \mathbf{x}_i)$ che $\cos(\angle\, \mathbf{x}_i\, \mathbf{v})$ in quanto $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.

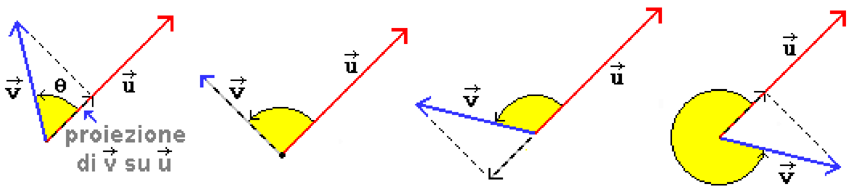
Una somma del tipo $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\ldots+a_n\mathbf{v}_n$ (con a_i numeri reali e $\mathbf{v}_i$ vettori) viene detta **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$. Evidentemente, ogni vettore può essere espresso (in modo unico) come combinazione lineare di **i**, **j** e **k**.

1 A lato sono raffigurati, da diversi punti di vista, due vettori tridimensionali **u** e **v**. Le porzioni di assi rappresentate sono lunghe 5. Determina:
|**u**|, |**v**|, **u**+**v**, **u**−**v**.
Nei casi in cui il risultato sia un vettore, rappresentalo graficamente.



3. Prodotto scalare o interno (dot product)

Viene chiamato ***prodotto scalare*** o *prodotto* ***interno*** (o ***dot product***, in inglese) di due vettori **u** e **v**, e indicato **u**·**v**, il *numero* pari al *prodotto del modulo di **u** per la proiezione di **v** su **u**:* vedi la prima figura sottostante. Se **u** e **v** sono *perpendicolari* il loro prodotto scalare (2ª figura) è nullo. Se **u** e **v** formano un angolo minore di un retto hanno prodotto scalare positivo. Se (3ª figura) **u** e **v** formano un angolo compreso tra un retto e un piatto hanno prodotto scalare negativo. Se (4ª figura) **u** e **v** formano un angolo maggiore di un piatto ci possiamo ricondurre ad una delle situazioni precedenti. Se **u** o **v** è nullo tale è anche il loro prodotto scalare.



In *fisica*, se **F** rappresenta un vettore forza costante applicato per produrre uno spostamento **s**, si prende come ***lavoro*** il prodotto tra la componente di **F** diretta come **s** e l'intensità di **s**, ossia il prodotto scalare **s**·**F**.

La proiezione di un vettore su un altro, considerata nelle figure soprastanti, è data dalla moltiplicazione di essi e del coseno dell'angolo da essi formato (vedi); il valore di questo non dipende dall'ordine con cui prendiamo gli angoli (cos(α) = cos(−α)), per cui possiamo anche scrivere:

u·**v** = **v**·**u** = 0 se **u** = 0 o **v** = 0, altrimenti **u**·**v** = ||**u**|| ||**v**|| cos(θ), dove θ è ∠**uv** o, equivalentemente, ∠**vu**.

Nei casi estremi (i vettori sono paralleli o perpendicolari) è facile vedere che la definizione precedente di *prodotto scalare* equivale alla seguente:

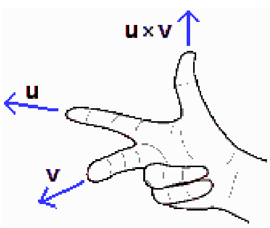
u·**v** = $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, se **u** = (u_1, u_2, u_3), **v** = (v_1, v_2, v_3).

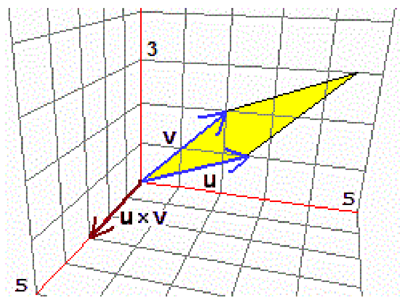
Questa proprietà e la seguente: **u** · (**v** + **w**) = **u** · **v** + **u** · **w** (la possibilità di ***distribuire*** il prodotto scalare rispetto alla somma) valgono in generale (prova a dimostrarlo; controlla **qui** le dimostrazioni richieste).

2 Determinare l'angolo da formato dai vettori **u** = (1, −2, 2) e **v** = (−4, 0, 2).

4. Prodotto vettoriale (cross product)

Viene chiamato ***prodotto vettoriale*** (o ***cross product***, in inglese) di due vettori **u** e **v**, e indicato **u**×**v**, il *vettore* che ha intensità pari all'area del parallelogramma che ha per lati **u** e **v** e che è perpendicolare ad esso ed è diretto secondo la "regola della mano destra" − vedi la figura sotto a sinistra − ossia come è diretto l'asse z se u e v sono diretti come l'asse x e l'asse y. Se uno dei due vettori, **u** e **v**, è nullo o se i due vettori sono allineati, il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo. Nella figura a destra è illustrato il caso in cui **u** = (0, 2.5, 1) e **v** = (0, 2, 2). Il prodotto **u**×**v** è (3, 0, 0).





La cosa può essere facilmente verificata direttamente, o come conseguenza del seguente fatto, la dimostrazione del quale lasciamo per esercizio:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \text{se } \mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z),\ \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

dove l'oggetto 3×3 rappresentato sopra (detto **determinante**, su cui ci si sofferma successivamente) è una abbreviazione per $\mathbf{i}(u_y v_z - u_z v_y) - \mathbf{j}(u_x v_z - u_z v_x) + \mathbf{k}(u_x v_y - u_y v_x)$, che è facile memorizzare pensando allo schema seguente:

$$\left| \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \right| \qquad \left| \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \right| \qquad \left| \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \right|$$

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

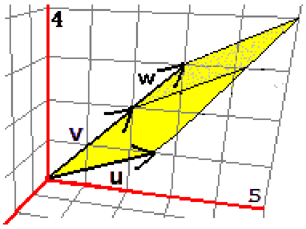
Verifichiamo, usando questa proprietà, che se **u** = (0, 2.5, 1) e **v** = (0, 2, 2) allora **u**×**v** è (3, 0, 0):

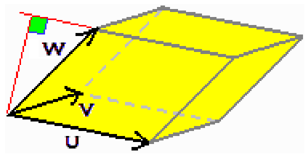
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2.5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2.5\cdot 2 - 1\cdot 2) - \mathbf{j}(0\cdot 2 - 0\cdot 1) + \mathbf{k}(0\cdot 2 - 0\cdot 2.5) = 3\,\mathbf{i}$$

Il prodotto vettoriale è definito ***solo nel caso tridimensionale*** (se ho due vettori non paralleli il loro prodotto vettoriale esce necessariamente dal piano da essi individuato).

Si ha, immediatamente, che **i**×**i** = **j**×**j** = **k**×**k** = **0**, **i**×**j** = **k**, **j**×**i** = −**k**, …

Si ha inoltre (vedi figura sotto a sinistra) che anche per il prodotto vettoriale vale la proprietà distributiva (se aggiungo **w** a **v** l'area del parallelogramma cresce in proporzione): **u** × (**v** + **w**) = **u** × **v** + **u** × **w**.





Si ha inoltre (vedi figura sopra a destra) che **w** ·(**u** × **v**) equivale al volume del parallelepipedo avente i tre vettori come lati (**u**×**v** ha come modulo l'area di una faccia ed è diretto perpendicolarmente a questa; il suo prodotto scalare per **w** è pari al prodotto del suo modulo per la componente di **w** perpendicolare alla faccia). Considerando in diverso ordine i lati del parallelepipedo, possiamo esprimere, equivalentemente, tale volume come **u** ·(**v** × **w**) o come **v** ·(**w** × **u**).

3 Siano **u** e **v** i vettori tridimensionali del quesito 1. Determina: **u**·**v**, **u**×**v**, ampiezza di ∠**uv**.
Nei casi in cui il risultato sia un vettore, rappresentalo graficamente.

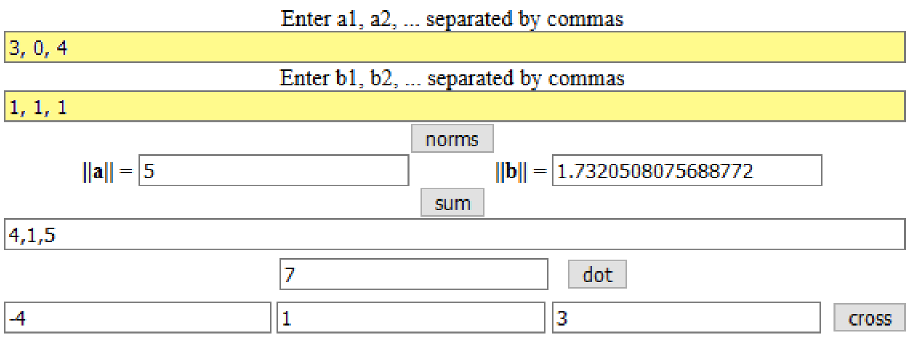
4 Dati i punti (1, 1, 1), (4, 4, 4), (3, 5, 5) e (2, 4, 7), trovare il volume del solido che li ha come vertici.

5 Dimostra che, se **u** e **v** non sono nulli, ||**u** × **v**|| = ||**u**|| ||**v**|| sin(θ), **u**·**v** = ||**u**|| ||**v**|| cos(θ), dove θ = min{∠**uv**, ∠**vu**}

5. Uso di script e di WolframAlpha. Applicazioni

Per svolgere i calcoli con i vettori di può usare lo script **Seq&Vettori**, il cui uso illustriamo con alcuni esempi.

u = (3, 0, 4) = 3**i** + 4**k**, **v** = (1, 1, 1) = **i** + **j** + **k**.
|**u**| = "diagonale di rettangolo 3×4" = √(9+16) = √25 = 5.
|**v**| = "diagonale di cubo 1×1×1" = √(1+1+1) = √3.
u+**v** = (3, 0, 4)+(1, 1, 1) = (4, 1, 5)
u−**v** = (3, 0, 4)−(1, 1, 1) = (2, −1,3)
u·**v** = 3·1+0·1+4·1 = 7
u×**v** = (-4,1,3)

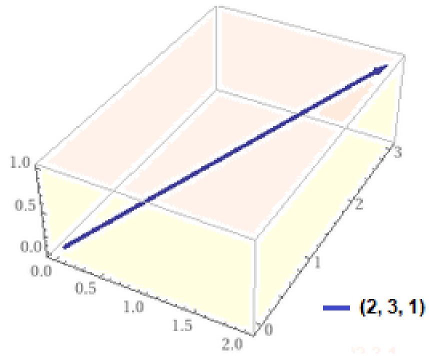


Usando il prodotto scalare posso trovare l'angolo formato dai due vettori: cos(∠uv) = dot / (|u|·|v|) = 7/(5·1.7320508075688772) = 0.8082903768654761

Con la nostra "grande CT": ∠uv = acos(0.8082903768654761) = 0.629553676681549 = 36.070768650796346° (36.07°)

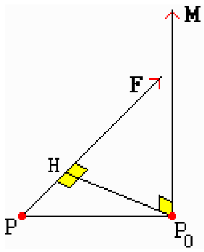
Lo script consente anche di operare con generiche sequenze di numeri. Vedi l'"help".

Tutti i calcoli sono facilmente realizzabili anche con **www.WolframAlpha.com**: vedi. Facciamo degli esempi.

Se batto:
```
vector (2,3,1)
```
ottengo la rappresentazione grafica a lato, la lunghezza del vettore e il vettore normalizzato:
```
sqrt(14)
( sqrt(2/7), 3/sqrt(14), 1/sqrt(14) )
```


Se batto:
```
vector (3,0,4)+(1,1,1)
```
ottengo la rappresentazione la rappresentazione dei due vettori e del vettore somma.
Se batto:
```
angle { (1, -2, 2), (-4, 0, 2) }
```
ottengo l'angolo tra i due vettori:
```
90°   π/2
```
Se batto:
```
dot { (1,-2,2) , (-4,0,2) }
```
ottengo il prodotto sclare dei due vettori:
```
0
```
Se batto:
```
cross { (0, 2.5, 1) , (0, 2, 2) }
```
ottengo il prodotto vettoriale dei due vettori:
```
(3, 2, 0)
```

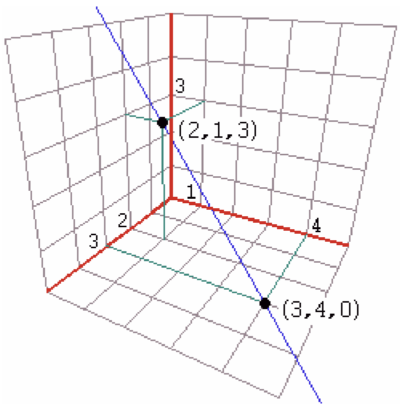
I prodotti vettoriali sono importantissimi in fisica, per indicare grandezze e relazioni tra esse. Qui ci limitiamo a considerare il ***momento*** di una forza, generalizzando considerazioni già svolte in precedenza (vedi qui per qualche approfondimento): il momento **M** di una forza **F** applicata nel punto P attorno al punto P_0 è espresso dalla equazione $\mathbf{M} = (P - P_0) \times \mathbf{F}$. Esso è un vettore che ha intensità pari alla distanza P_0H tra la retta lungo cui è applicata **F** e il punto P_0 moltiplicata per l'intensità di **F** (come avevamo già visto), ed è diretto come illustrato nella figura a fianco, perpendicolarmente al piano individuato da **F** e P_0.



Accanto ai vettori in $\mathbf{R}^3$ sono considerati i vettori in $\mathbf{R}^n$ con $n > 3$. Essi si occupano di n-uple di numeri reali e di tabelle di dimensioni maggiori di quelle 3×3, qui considerate. Trovano applicazioni, tra l'altro, in statistica e in economia, oltre che in vari ambiti algebrici e geometrici (come vedrai, se proseguirai gli studi in ambito matematico).

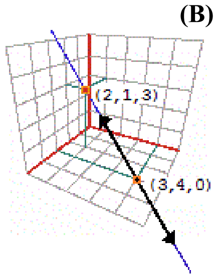
6. Approfondimenti

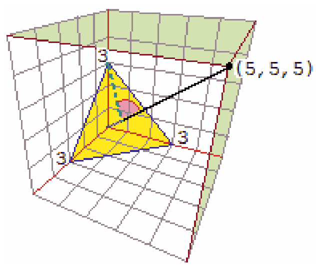
Una ***retta*** nello spazio può facilmente essere descritta generalizzando quanto fatto nel piano (vedi). Ad esempio la retta che passa per i punti (3, 4, 0) e (2, 1, 3) - vedi figura (**A**) - è l'insieme dei punti P che possono essere raggiunti da (3, 4, 0) mediante spostamenti diretti come il vettore (3, 4, 0)-(2, 1, 3) = (1, 3, −3) - vedi figura (**B**), direzione in discesa - o il vettore opposto (−1, −3, 3) - vedi figura (**B**), direzione in salita.



(A)

(B)





(C)

Ovvero: P = (3, 4, 0) + (−1, −3, 3)·t con t numero reale, ossia, indicando P con (x, y, z), x = 3 − t, y = 4 − 3t, z = 3t.
Per t > 0 ho i punti che stanno sulla semiretta di origine (3, 4, 0) diretta come il vettore (−1, −3, 3), per t < 0 ho quelli che stanno sulla semiretta diretta come il vettore opposto, (1, 3, −3).

Vediamo come descrivere il ***piano*** che passa per i punti dei tre assi di ascissa 3, di ordinata 3 e di quota 3: figura (**C**)

Esso è perpendicolare alla retta x = y = z, tra l'origine e il punto (5, 5, 5), ossia alla retta diretta come (1, 1, 1). Un punto P sta nel piano se il vettore da un punto del piano, ad es. (3,0,0), e P è perpendicolare a tale retta, ossia, indicato P con (x,y,z), se ⇒ (x−3, y, z) × (1,1,1) = 0, ossia x−3+y+z = 0, ossia **x+y+z = 3**. Questa è l'equazione del nostro piano, ossia la descrizione di un punto (x,y,z) che sta in esso.

In modo del tutto analogo si trova che il piano contenente il punto (x_0, y_0, z_0) perpendicolare al vettore (a,b,c) ha equazione

$\mathbf{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$:

(x, y, z) che soddisfi questa equazione è tale che il prodotto scalare del vettore $(x_0,y_0,z_0)-(x,y,z)$ per il vettore (a,b,c) sia nullo.
Ovviamente, ax+by+cz = m al variare di m sono tutti piani paralleli, perpendicolari al vettore (a,b,c).

6 Descrivere (algebricamente) la retta passante per (2,−1,3) parallela al vettore (3,−7,4).

7 Trovare l'equazione del piano passante per il punto (2,4,−1) e perpendicolare al vettore (3,5,−2).

7. Esercizi

e1 Dati i vettori **u** = (2, 5, 7) e **v** = (1, 2, 4), trovare le coordinate del prodotto vettoriale **u**×**v**.

e2 Dati i punti (1, 1, 1), (2, 2, 2) e (4, 3, 5), trovare l'area del triangolo che li ha come vertici.

e3 Sia **a** = 2**i** - 3**j** - 6**k**, **b** = **i** + 3**j** - **k** e **c** = **i** - **j** + 3**k**
Determina, se possibile, **a** · (**b** × **c**), **a** × (**b** · **c**), **a** × (**b** × **c**)

e4 Verifica l'espressione della equazione del piano passante per Q e perpendicolare a **v** nel caso in cui Q sia l'origine e **v** il versore di uno degli assi.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
modulo di un vettore (§2), *coseni direttori* (§2), *prodotto scalare* (§3), *prodotto vettoriale* (§4).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol Istogramma RandomNum IntGauss AB3dim TabFun Det3 Seq&Vettori ALTRO