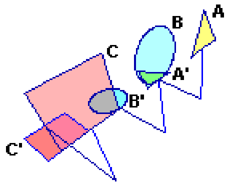
La prospettiva

Come si vedono/disegnano gli oggetti tridimensionali

0. Introduzione

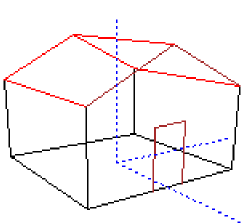
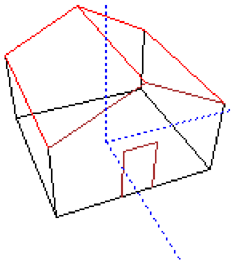
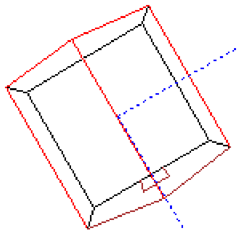
L'ombra di un cartello stradale è una figura F' che ha l'aspetto di una deformazione della forma F (triangolo, rettangolo o cerchio) originale; ad es. un cerchio può diventare un'ellisse non circolare o un triangolo equilatero può diventare un triangolo scaleno. L'associazione tra cartello e sua ombra può essere considerata come una trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra. Nel primo paragrafo ci soffermeremo su questo aspetto, cioè su come *alcune trasformazioni tra figure bidimensionali possono essere interpretate nello spazio tridimensionale.*



Nel successivo ci occuperemo dei modi in cui si possono ottenere rappresentazioni sul piano di porzioni della *superficie terrestre.*

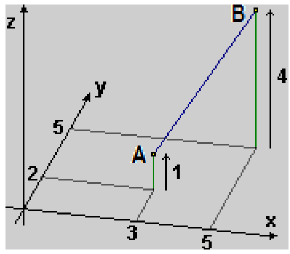
Nel terzo paragrafo approfondiremo alcuni aspetti legati alla *storia dell'arte.*

Seguirà un paragrafo di *approfondimenti,* in cui, tra l'altro, si accennerà a come col computer si possono ottenere grafici di funzioni di due variabili e di figure tridimensionali come le seguenti.

1. Proiezioni tra superfici

Abbiamo già considerato, in più occasioni, l'uso delle coordinate (x: ascissa, y: ordinata, z: **quota**) per individuare punti e particolari figure nello spazio. Ricordiamo come si può estendere il concetto di ***distanza*** al caso *tridimensionale.*



Dati A, pari a (x_A, y_A, z_A), e B, pari a (x_B, y_B, z_B), abbiamo che la distanza *euclidea* e quella *urbanistica* tra A e B sono, rispettivamente, $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ e $|\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$.

Nel caso a fianco, in cui A = (3,2,1) e B = (5,5,4), la distanza euclidea tra A e B è $\sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22} = 4.6904\ldots$, mentre quella urbanistica è $|2|+|3|+|3| = 8$.

Come nel caso piano, in genere, se non diamo indicazioni diverse, parlando di distanza intendiamo quella "euclidea".

Se consideriamo il vettore AB, che parte da A e arriva a B, abbiamo che il suo modulo è pari alla distanza di A da B, ossia $\sqrt{22}$.

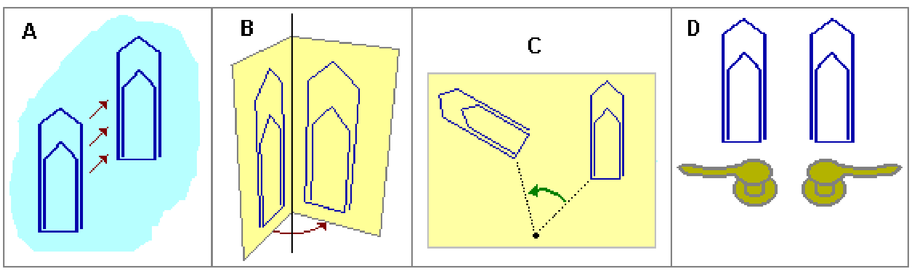
Tutti questi calcoli possono essere fatti facilmente con lo script **AB3dim**.

Vediamo ora alcune ***trasformazioni geometriche*** nel caso tridimensionale, senza precisarne la descrizione in termini algebrici [può essere sviluppata in modo simile, anche se tecnicamente più complesso, a quanto fatto → per il *caso bidimensionale*].

Se variamo le x, le y e le z di tutti punti di una figura di tre valori fissati h, k e q operiamo una *traslazione* di vettore (h,k,q): vedi il disegno **A**, sotto a sinistra, in cui la figura ha la forma di un fermaglio.

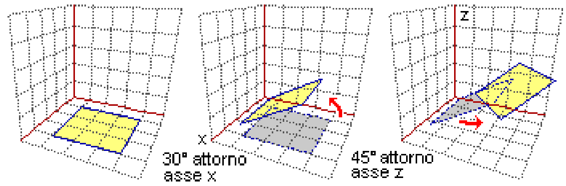
Se ruotiamo della stessa ampiezza ogni punto della figura attorno all'asse z (ogni punto ruota in un piano z=h, dove h è la quota del punto), eseguiamo una *rotazione* attorno all'asse z; in modo analogo si hanno le rotazioni aventi come *asse di rotazione* l'asse x e l'asse y.

Nel disegno **B** il fermaglio è collocato in un piano che passa per l'asse di rotazione. Nel disegno **C** giace in un piano *perpendicolare* all'asse di rotazione (ossia, se l'asse di rotazione è l'asse z, giace in un piano del tipo z=h; il punto evidenziato è quello in cui l'asse z interseca il piano del fermaglio).



Con una sequenza di traslazioni e di rotazioni attorno agli assi è possibile "spostare" una figura senza modificarne forma e dimensioni (ossia lasciando invariate le distanze tra i suoi punti).

A lato è rappresentato un quadrato nel piano z=0 che viene ruotato attorno all'asse x e poi all'asse z facendogli assumere un'altra posizione e un altro orientamento. Le figure geometriche iniziale e finale vengono dette *sovrapponibili* e la trasformazione complessiva viene detta *movimento.*



Se, dati due oggetti dello stesso materiale, li consideriamo *eguali* quando essi (o, meglio, le loro forme, cioè le figure geometriche che rappresentano lo spazio da essi occupato) sono sovrapponibili, possiamo dire che i due fermagli del disegno **D** sono eguali, mentre le due maniglie non lo sono: comunque se ne sposti una, non si riesce a collocarla nella stessa posizione occupata dall'altra. Tuttavia se le due maniglie sono nella disposizione raffigurata e se collochiamo opportunamente un vetro tra di esse, la maniglia vista in trasparenza viene a sovrapporsi all'immagine riflessa dell'altra.

Le riflessioni speculari vengono dette anche *simmetrie* (il piano della superficie che funge da specchio viene detto piano di simmetria). Due figure tali che una possa essere sovrapposta ad una immagine speculare dell'altra vengono dette *inversamente sovrapponibili*.

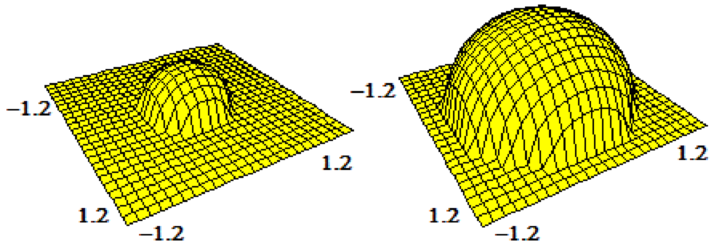
Nota 1. Se fossimo nello spazio bidimensionale neanche i due fermagli sarebbero uguali: con un movimento che non esca dal piano non posso sovrapporre uno all'altro.

Nel linguaggio comune due oggetti dello stesso materiale inversamente sovrapponibili vengono detti *simmetrici* (le mani di una persona, un paio di scarpe,…); viene detto simmetrico anche un oggetto che abbia un piano di simmetria, cioè che possa essere tagliato da un piano in due parti che siano una l'immagine speculare dell'altra (certe foglie, la forma di gran parte degli animali, molti edifici,…).

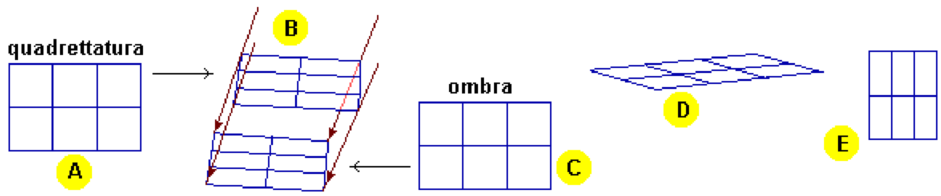
Le trasformazioni ottenute eseguendo successivamente movimenti e simmetrie vengono dette *isometrie* in quanto lasciano invariate le misure di lunghezza (la distanza tra due qualunque punti della figura "trasformata" è eguale a quella dei corrispondenti punti della figura iniziale), e quindi anche le misure di superficie e di volume.

Una trasformazione geometrica che altera in un rapporto costante le distanze viene detta invece *similitudine.* Figure ottenibili l'una dall'altra mediante una tale trasformazione si dicono *simili*.

Come nel caso piano, le similitudini sono ottenibili componendo isometrie e *trasformazioni di scala* monometriche: a destra è illustrata la trasformazione di una figura mediante la trasformazione di scala di fattore 2.



Consideriamo una quadrettatura (figura **A**) disegnata su un vetro e osserviamone l'ombra generata dai raggi del sole su un cartoncino bianco. Se teniamo il vetro parallelo al cartoncino (figura **B**) otteniamo un'immagine eguale al disegno (figura **C**). Infatti l'ombra ottenuta non è altro che il risultato di una traslazione nella direzione dei raggi del sole.

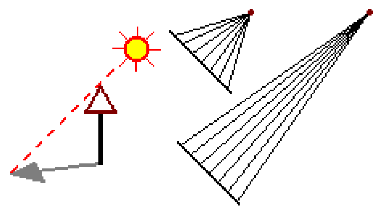


Se incliniamo il vetro o il cartoncino otteniamo un'ombra con forma in genere diversa dalla quadrettatura originale, come le figure **D** ed **E**.

$\boxed{1}$ Come deve essere collocato il vetro affinché si ottenga la figura **E**?

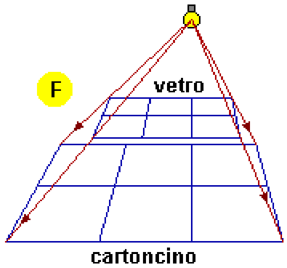
Queste trasformazioni (così come quelle ottenibili invece che con i raggi del sole con un proiettore che genera un fascio di luce unidirezionale) vengono dette ***proiezioni parallele***, cioè con raggi proiettanti che hanno la medesima direzione.

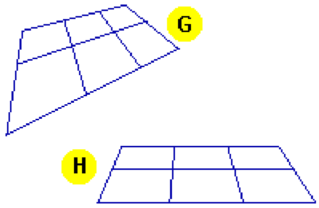
Nota 2. A questo punto occorre qualche precisazione: che cosa sono i raggi del sole? sono davvero paralleli? I ***raggi*** *di luce* non sono cose concrete, sono un modo comodo per indicare la direzione verso cui si propaga la luce, di cui si può avere un'idea osservando il pulviscolo illuminato dal fascio di luce che attraversa un foro.
Nel caso della figura a sinistra il "raggio di sole" evidenziato è la semiretta che ha origine nel centro del sole e passa per il vertice del cartello, e che ci può essere comodo considerare per disegnare l'ombra del cartello stesso. I *raggi del sole non sono paralleli*, in quanto stanno su rette che passano tutte per il centro del sole, *ma* su una stessa superficie che venga man mano allontanata arrivano sempre più allineati, come si vede nella figura a destra. La Terra è tanto lontana dal Sole che in una regione terrestre sufficientemente piccola i raggi del sole arrivano tutti con inclinazioni che non sono praticamente distinguibili. Nei nostri ragionamenti possiamo, quindi, *far finta che* siano paralleli.

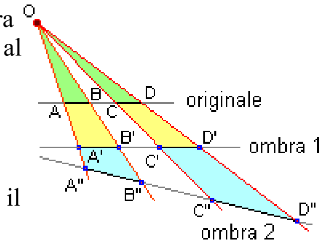


Le *trasformazioni* ottenute mediante proiezioni parallele *da un piano a un altro,* eventualmente sottoposte a un ingrandimento o a una riduzione di scala, o a un ribaltamento (ossia guardando le figure su una faccia o sulla faccia opposta del piano in cui stanno), trasformano una figura piana in una nuova figura piana che può non essere simile ad essa (un rettangolo può diventare un parallelogramma non rettangolo) ma che ha comunque una certa somiglianza con essa; si dice che è ad essa *affine*, e questo tipo di trasformazioni vengono chiamate ***affinità***.

Se utilizziamo una sorgente di luce puntiforme (una lampadina senza specchio retrostante, una candela) nel caso in cui vetro e cartoncino siano paralleli otteniamo un'ombra quadrettata, simile alla figura disegnata sul vetro (vedi disegno **F**).

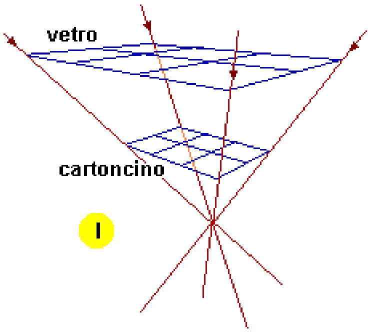


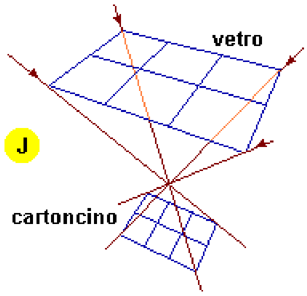




Se incliniamo il vetro o il cartoncino otteniamo un'immagine deformata, come le figure **G** e **H**. La figura **H** è stata ottenuta con il vetro posto in modo che le linee "orizzontali" della quadrettatura fossero parallele al cartoncino.

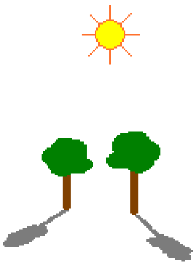
Immagini analoghe si ottengono usando un proiettore con fascio di luce concentrico (vedi disegno **I**); se il centro del fascio di luce è interposto tra vetro e cartoncino l'immagine viene capovolta (disegno **J**).





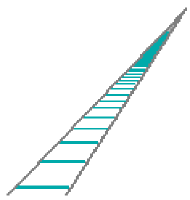
Tutte queste trasformazioni vengono dette ***proiezioni centrali*** , cioè con raggi proiettanti che passano per un medesimo punto (il *centro di proiezione*). Nel caso delle proiezioni parallele i raggi avevano in comune la direzione, quelle centrali hanno in comune un punto.

Le proiezioni parallele possono essere considerate un caso limite delle proiezioni centrali: come abbiamo visto sopra, se il centro di proiezione si allontana, su una piccola superficie i raggi arrivano con direzioni man mano più vicine, e sono via via con migliore approssimazione considerabili paralleli. Nel caso particolare della figura F, man mano che allontano la lampadina l'ombra rimpicciolisce e tende ad assumere le stesse dimensioni della figura originale.



Ma in vari contesti l'uso di rette parallele e di rette che passano per uno stesso punto sembra evidenziare delle contraddizioni:
– se le ombre dei tronchi sono parallele perché nella foto non appaiono tali?
– se traccio due semirette con uguale direzione, come se procedessi lungo le rotaie di un binario senza fine, per quanto vada avanti non arrivo a un punto di incontro; come è possibile che le loro rappresentazioni nella fotografia abbiano invece un punto in comune?

Spiegheremo queste apparenti contraddizioni tra due paragrafi.



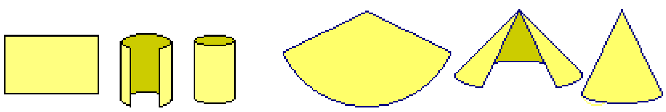
2. Rappresentazioni cartografiche

Le *rappresentazioni cartografiche* non riproducono in proporzione le distanze reali, e questa "sproporzione" diventa più evidente man mano che cresce la porzione di superficie terrestre che si vuole rappresentare: per spiaccicare sul piano un pezzo di superficie sferica alcune zone devono essere dilatate più di altre; se il pezzo è più piccolo è anche più piatto e tutte le zone vengono deformate poco, senza grandi differenze.

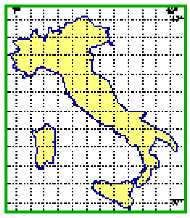
Che significato ha, allora, la ***scala di riduzione*** indicata sulle cartine?

Quella indicata di solito è la scala che vale nei pressi del centro della cartina. A volte su cartine di grandi estensioni si trovano indicazioni come «scala equatoriale 1:…» o «scala sul meridiano centrale e sull'equatore 1:…» o «scala sul parallelo centrale e sui meridiani 1:…» o …, che stanno a segnalare che la scala è valida esattamente solo per distanze lungo l'equatore o per distanze lungo l'equatore e lungo il meridiano centrale o …. Tuttavia nel caso di piccole estensioni (la carta di una provincia, per esempio) la scala varia così poco da non essere apprezzabile con gli usuali strumenti di misura: le distanze alla periferia della cartina possono essere deformate di piccole frazioni di millimetro, non rilevabili con la riga millimetrata e, comunque, scarsamente influenti sul computo della distanza reale.

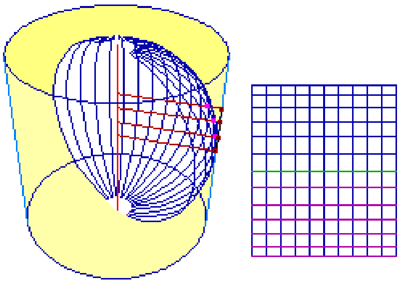
Nota 3. Vi sono superfici curve che, a differenza di quelle sferiche, possono essere "spiaccicate" su una superficie piatta senza alcuna fatica: le superfici *cilindriche* e quelle *coniche.* "Tagliandole" opportunamente possono essere ***sviluppate*** su un piano; viceversa, incurvando e incollando opportunamente un foglio si possono ottenere cilindri e coni.



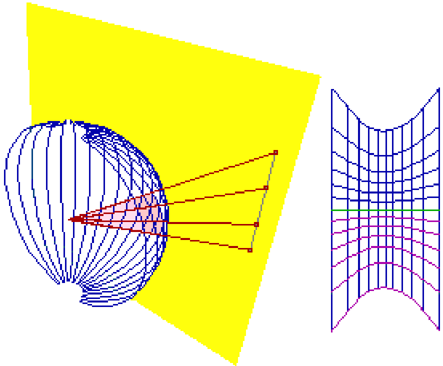
Si tratta di superfici che possono avere una perfetta riproduzione piana in scala: la distanze tra due punti su un cilindro o su un cono sono uguali alle lunghezze dei segmenti che li hanno per estremi nello sviluppo piano. Infatti rotte rettilinee su un cilindro o su un cono rimangono tali nello sviluppo piano. In particolare posso determinarne facilmente anche l'area. Ad es. la *superficie laterale del cono* è pari a quella del settore circolare che ha raggio pari all'***apotema*** *a* del cono (distanza tra vertice e bordo di base) e arco lungo quanto la circonferenza di base *c* del cono, ossia ha area pari a quella di un triangolo di base *c* e altezza *a*, ossia: $c \cdot a^2/2$.



Le rappresentazioni cartografiche sono *trasformazioni geometriche* da una superficie sferica a una piana. Una semplice rappresentazione cartografica è quella illustrata a lato (clicca sull'Italia per una immagine ingrandita o ➜ vedi la scheda *L'Automazione 5*), realizzata rappresentando le *coordinate geografiche* come se fossero *coordinate cartesiane* (ossia rappresentando meridiani e paralleli con dei tratti rettilinei aventi distanze tra loro proporzionali alle differenze delle coordinate geografiche). Sotto vediamo le sembianze che assume quello che con questa tecnica appare un reticolato di rettangolini uguali se si usano altre due tecniche cartografiche.



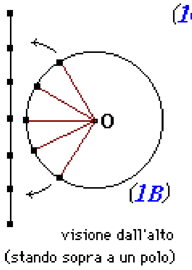
(1) proiezione perpendicolare su cilindro circoscritto



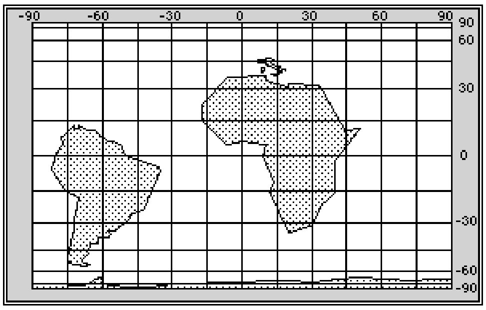
(2) proiezione dal centro su piano tangente

Queste tecniche, ed altre, usano delle *proiezioni* dalla superficie sferica su un piano, come nel caso (2), o su una superficie sviluppabile su un piano, ossia cilindrica, come nel caso (1), o conica.

Soffermiamoci sulla rappresentazione **(1)**. Sotto (1B) si vede dall'alto la proiezione sul cilindro e lo sviluppo piano di questo. Si vede anche (1C) la forma che assumono alcune regioni terrestri.

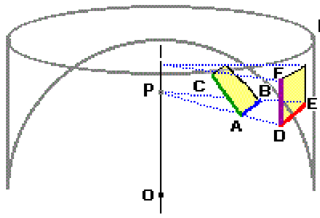


(1B)



(1C)

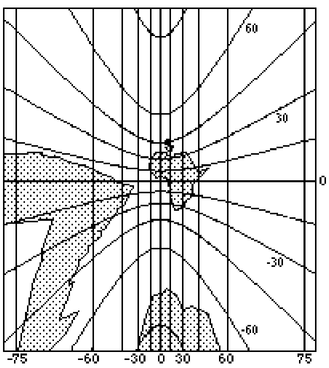
Questa rappresentazione è usata spesso in quanto ha la caratteristica di *rappresentare fedelmente le* ***aree***: il rapporto tra l'area della rappresentazione dell'Africa e quella della rappresentazione del Sud America è uguale al rapporto che effettivamente sussiste tra l'area dei due continenti. Per capire come ciò sia possibile si osservi l'illustrazione seguente.

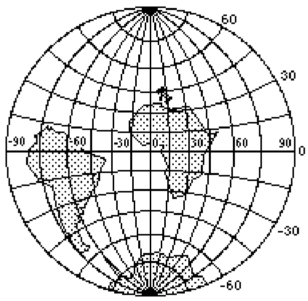


(1D)

In 1D sono rappresentati un pezzetto di superficie terrestre compreso tra due meridiani e due paralleli molto vicini e la sua proiezione sul cilindro. La larghezza AB del pezzetto nella proiezione assume una dimensione DE maggiore. In compenso l'altezza AC del pezzetto nella proiezione assume una dimensione DF minore. Questa compensazione fa sì (come si potrebbe dimostrare) che pezzetto e sua proiezione abbiano la stessa area. Da questa osservazione possiamo anche dedurre qual è l'***area di una superficie sferica***:
sommando tutti i pezzetti e tutte le rispettive proiezioni, abbiamo che la superficie della sfera è *uguale alla superficie laterale del cilindro* (di altezza uguale al diametro) che la circoscrive. Quest'ultima è uguale all'area del rettangolo che si ottiene sviluppando il cilindro, rettangolo che ha come dimensione orizzontale la circonferenza avente per raggio il raggio **r** della sfera ($2\pi r$) e per dimensione verticale il diametro ($2r$), ossia vale $\mathbf{4\pi r^2}$.

Negli esercizi sono considerate altre tecniche cartografiche. Qui a fianco illustriamo solo quella che ha la caratteristica di *rappresentare le* ***rotte rettilinee*** *con rette* – è la rappresentazione (2) considerata sopra – e quella che ha la caratteristica di *conservare gli* ***angoli*** *formati da rotte che si intersecano.*

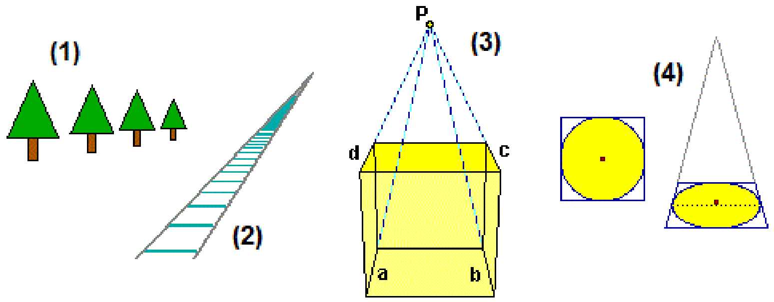




2 Parto da Roma con un aereo dotato di una grande autonomia di volo e mantengo la direzione est. Supponendo di non aver problemi di carburante e di riuscire a raggiungere la longitudine opposta, a quale latitudine mi vengo a trovare? (alla stessa di Roma, più a nord, più a sud, dipende dalla quota a cui ho volato?)

3. La prospettiva

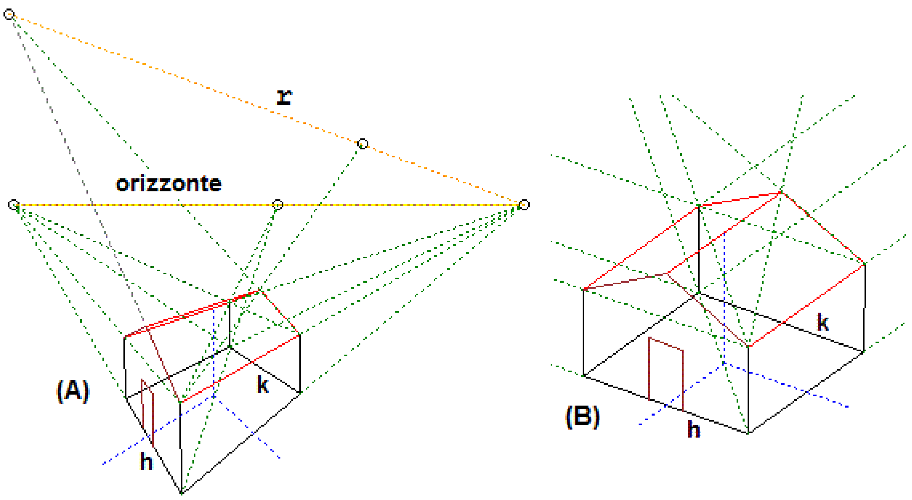
Un metodo per dare, in un disegno, idea della "profondità" è *diminuire le dimensioni* degli oggetti che si vogliono far sembrare più lontani; questa è la tecnica adottata in (**1**). Questa tecnica, applicata alla rappresentazione di un binario, dà luogo a una figura come (**2**): il fatto che le traversine debbano apparire man mano più piccole fa sì che i due binari, che sono *paralleli*, debbano essere rappresentati lungo due *direzioni diverse*, ossia con due tratti rettilinei che, prolungati, convergano in un punto (senza poterlo scavalcare, altrimenti le traversine ricomincerebbero ad aumentare di dimensione). A questo accorgimento (rappresentare linee parallele che si allontanano facendole convergere in un punto) abbiamo già accennato nel primo paragrafo.



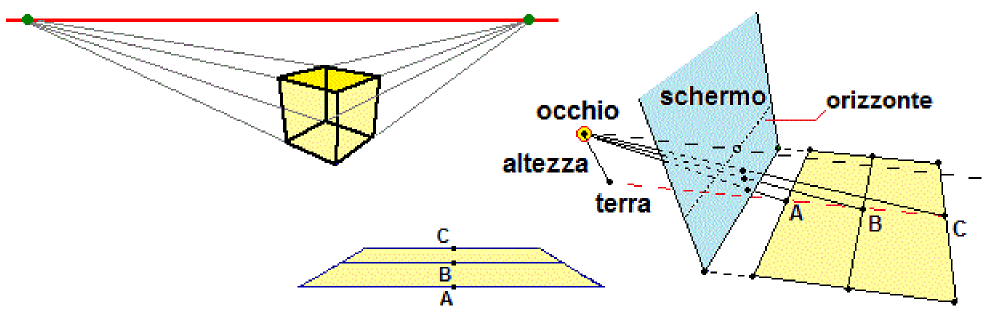
In (**3**) un altro esempio: la rappresentazione di una scatola *cubica* di materiale trasparente; gli spigoli a, b, c e d, che sono tra loro paralleli, li rappresento lungo rette che si incontrano nello stesso punto; gli spigoli perpendicolari al mio sguardo, che stanno su rette che non si allontanano, li disegno mantenendoli paralleli; gli spigoli verticali, poiché sto guardando dall'alto, li disegno lungo linee che tendono a convergere, lentamente, in un punto in basso. In (**4**) la rappresentazione di un cerchio (potrebbe essere l'orlo di un vaso): lo immagino inscritto in un quadrato, disegno come vedrei il quadrato e, poi, traccio la figura che rappresenta il cerchio (il centro del cerchio non è più al centro, ma è più vicino alla parte più lontana del bordo).

La rappresentazione piana (su un foglio o su altro materiale) di oggetti tridimensionali viene chiamata ***prospettiva***. Qui abbiamo incominciato a considerare alcune tecniche *prospettiche.* I punti verso cui tendono a convergere le rappresentazioni di traiettorie parallele, come il punto P nella figura (3), vengono detti ***punti di fuga***: sono i punti verso cui si "fugge" se ci si muove lungo queste traiettorie. In altre parole, il punto di fuga della rappresentazione di una retta è il ***limite*** a cui tende la rappresentazione di un punto che si muove allontanandosi lungo tale retta.

Queste prime tecniche sono sufficienti per affrontare approssimativamente solo alcuni disegni. Se volessimo realizzare un disegno come il seguente (una casetta) avremmo il problema di dove collocare i diversi punti di fuga corrispondenti alle diverse direzioni lungo cui sono disposti, per es., gli spigoli della casa e del tetto. Poi ci sarebbero anche problemi relativi alle dimensioni e alle distanze; ad es. la larghezza h della facciata e quella k del lato opposto, che nella realtà sono uguali, cambiano nella figura (A); questi problemi non ci sono nella figura (B), che corrisponde ad un punto di vista molto lontano, per cui i due lati appaiono ugualmente lunghi.



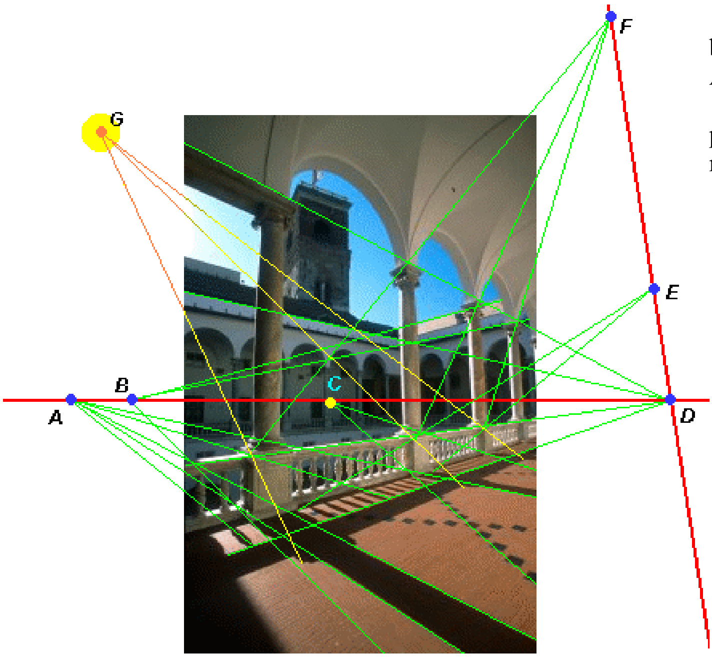
Accenniamo, brevemente, a come si realizzano rappresentazioni di questo tipo, rinviando al paragrafo "approfondimenti" ulteriori considerazioni. Il binario, gli spigoli dei tetti e tutte i segmenti orizzontali (esclusi quelli perpendicolari alla direzione dello sguardo), a qualunque altezza da terra, si vedono su semirette che hanno l'origine in un punto (punto di fuga) che sta su una particolare linea, chiamata ***orizzonte***. È la linea in cui ci sembra che finisca il mare o una grande pianura. La figura sottostante a destra spiega perché questo accade: man mano che un punto si sposta da A a B, a C, ... allontanandosi, sullo "schermo" esso tende ad essere visto sempre più in alto, ma senza mai superare l'altezza in cui è collocato il nostro "occhio". Nel caso del cubo raffigurato, tutti gli spigoli, prolungati, vanno a finire sull'orizzonte.



Qualcosa di analogo accade anche per tutti i segmenti che stanno in piani non orizzontali. Facendo riferimento alla figura (**A**) soprastante, osserviamo come tutte le rette parallele che hanno la stessa direzione vanno a confluire in uno stesso "punto di fuga", e che quelle stanno sulla faccia a noi vicina del tetto hanno punti di fuga che stanno su una stessa retta.

L'analisi della seguente foto, del Loggiato Maggiore del Palazzo Ducale di Genova, realizzata con una buona macchina fotografica, avvalora il procedimento descritto nei punti precedenti.

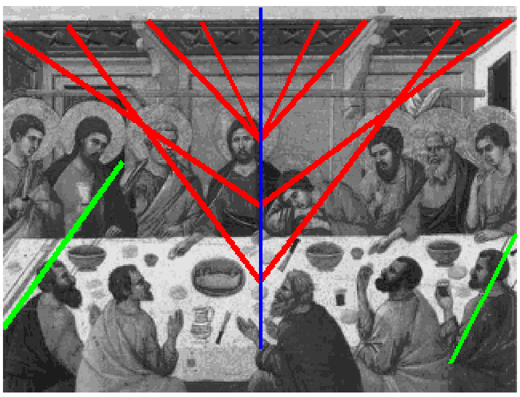
Rette parallele tra loro (e non al quadro) vengono viste confluire in uno stesso punto: la balaustra e la sua ombra convergono verso il punto D, le rette che congiungono la base inferiore del blocco su cui poggia una colonna con la base superiore di quello successivo convergono verso il punto E, le ombre di pilastrini e colonne convergono vero il punto A, il lato del porticato perpendicolare a quello visto in primo piano e la linea perpendicolare alla balaustra che separa due tipi di pavimentazione convergono verso B, …



Le rette che stanno su piani orizzontali (ombre di colonne, balaustre, profili del tetto, …) convergono tutte sulla stessa retta, AD.

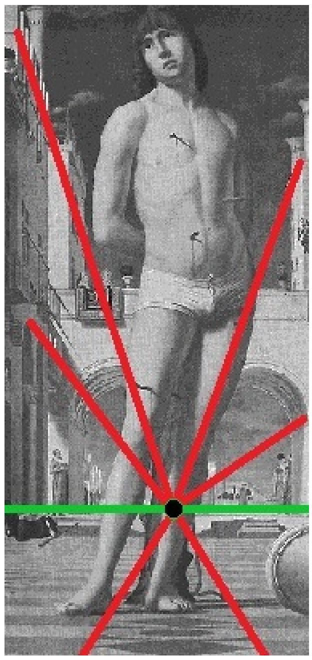
Le rette che stanno sul piano delle colonne o su piani ad esso paralleli (come il lato opposto del porticato) convergono sulla stessa retta, DF.

$\boxed{3}$ Associa ai due dipinti seguenti (un'"Ultima Cena" e un "San Sebastiano") l'autore e l'anno di realizzazione. Quale dei due dipinti mostra la padronanza della tecnica della prospettiva? Perché?

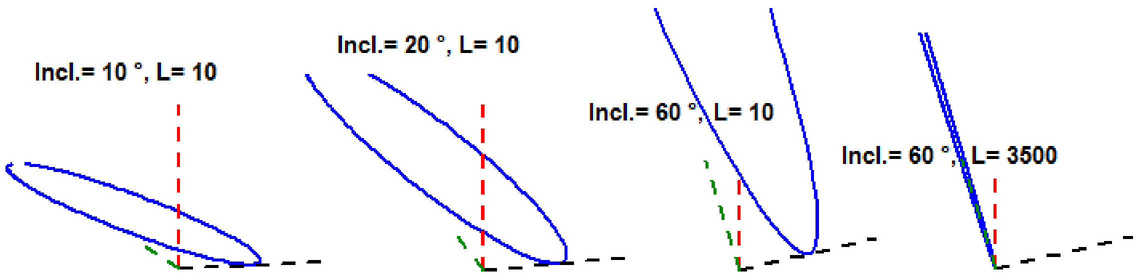


Antonello da Messina
Duccio di Boninsegna

1310
1476



Le rappresentazioni prospettiche non solo non permettono di distinguere un quadrato da un generico quadrangolo, ma neanche una parabola da una ellisse o da un'iperbole. Approfondirai questo argomento più avanti nel corso degli studi. Per ora guarda la seguente figura, osservata da diversi punti di vista (punto lo sguardo sull'origine, le porzioni di assi tracciate sono lunghe L, osservo da un'inclinazione di 10, 20 e 60 gradi rispetto al piano xy). A prima vista non sappiamo stabilire se si tratta di un'ellisse o di una parabola.



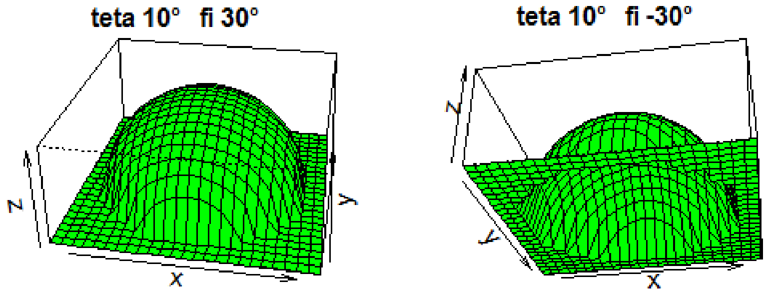
È la parabola $y = (x-5)^2$.

4. Approfondimenti

Grafici 3D col computer

Il disegno sotto a sinistra, tratto da un manuale di pittura (dei primi anni del '500) del pittore Albrecht Dürer, spiega come realizzare un disegno in prospettiva utilizzando un reticolo quadrettato collocato verticalmente e un foglio quadrettato (su cui riportare l'immagine vista attraverso il reticolo).

Oggi, oltre a disporre delle macchine fotografiche, possiamo realizzare rappresentazioni di questo tipo col computer: basta fornire ad un opportuno programma le coordinate tridimensionali dei punti dell'oggetto che vogliamo rappresentare, le coordinate dell'*occhio* da cui vogliamo vederlo, la direzione del nostro sguardo, e la distanza dall'occhio dello *schermo* piano su cui proiettare l'immagine. Sostanzialmente in questo modo sono state ottenute le immagini della casetta e della parabola che hai visto nel paragrafo precedente. E in questo modo sono state ottenute anche le immagini seguenti:



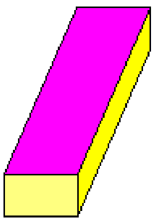
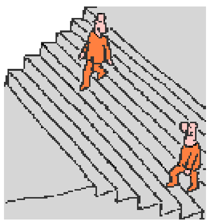
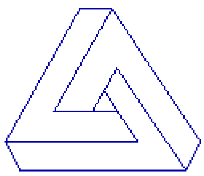
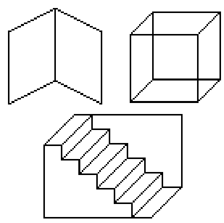
Con **Casa3dim** puoi esplorare operativamente la rappresentazione prospettica di una casetta.

Ancora sulle rappresentazioni prospettiche

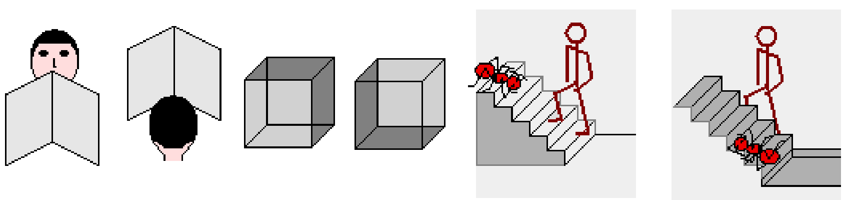
Nel documento **Arte** il tema della prospettiva è approfondito dal punto di vista della storia dell'arte, mettendo a fuoco il ruolo avuto da **Piero della Francesca**. Qui ci limitiamo ad alcuni aspetti legati ai cosiddetti ***paradossi della visione***.

Il nostro apparato visivo (occhio+cervello), grazie a forme di elaborazione in parte congenite e in parte sviluppate attraverso l'esperienza, è in grado di interpretare come immagine **3D** (a 3 dimensioni) l'immagine **2D** (a 2 dimensioni) che arriva sulla retina. Potremmo dire che abbiamo "incorporato" qualche procedimento matematico che ci consente ciò. Questo nostro "*vedere non solo con gli occhi*" è anche uno dei fattori di un particolare tipo di illusioni ottiche, chiamate ***paradossi della visione***.

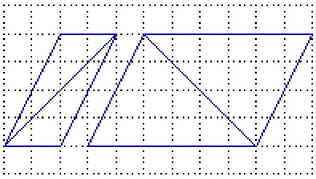
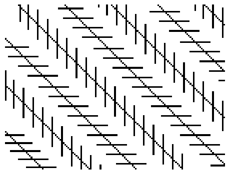
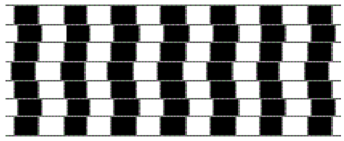
Si consideri ad es. la *figura* sotto *a sinistra*. È costituita dall'unione di tre parallelogrammi, ma alla nostra vista sembra che il lato più alto del parallelogramma più grande sia più lungo del lato opposto. Ciò accade in quanto il nostro occhio interpreta la figura come l'immagine 2D di un oggetto 3D e quindi tende a percepire il lato "lontano" come più lungo, per compensare l'effetto prospettico, discusso nei paragrafi precedenti, della riduzione degli oggetti più lontani.

La *seconda figura* ci crea ambiguità interpretativa; vengono unite due immagini che corrispondono a punti di vista diversi: è la vista globale della figura che ci disturba; se ne copriamo la parte superiore o inferiore il conflitto sparisce. Anche la *terza figura* (nota come "triangolo impossibile") ci crea un disturbo visivo solo se la guardiamo globalmente, in tutti i suoi vertici: è l'unione di 3 figure fatte a "7", ma ci richiama l'idea della rappresentazione piana di un solido che non riusciamo a interpretare. Nel caso delle *figure a destra* tendiamo a percepirle come rappresentazioni di oggetti tridimensionali a noi noti (un libro aperto, un cubo, delle scale), ma la loro errata prospettiva (lati vicini e lontani sono rappresentati nelle stesse dimensioni) ci crea dubbi di interpretazione: se fissiamo gli oggetti dopo un po' ci appaiono diversi, e poi la nostra impressione cambia ancora. Non riusciamo a fissare quali componenti sono da intendere in primo piano e quali in secondo. Solo aggiungendo dei colori o dei particolari, come sotto, riusciamo a sciogliere l'ambiguità:

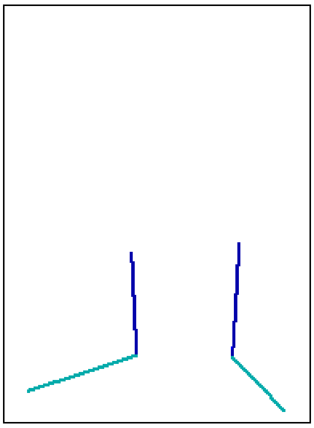


La figura *sotto* a sinistra mette in luce altri limiti della nostra intuizione spaziale: due segmenti uguali, formati ciascuno da 4 diagonali di quadretto, a prima vista ci sembrano diversi. Altri limiti sono messi in luce dalle altre due figure. Si tratta di fenomeni che possono essere interpretati in relazione ad altri problemi percettivi, legati alla contemporanea presenza di parti di figura disposte diversamente o colorate diversamente, che ci fanno apparire segmenti uguali come diversi, rette parallele come incidenti, linee rette come incurvate.

5. Esercizi

e1 A lato sono raffigurati due pali verticali e le loro ombre.
Disegna il sole.
Spiega (e motiva) il procedimento impiegato.

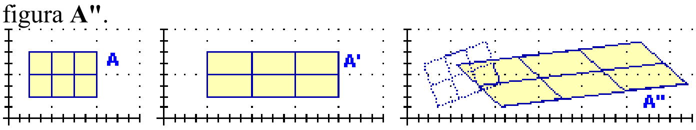


e2 Presso una fermata dell'autobus in una zona pianeggiante è sistemata una sottile tettoia circolare sorretta al centro da un palo. Alle 16 del pomeriggio in un giorno soleggiato l'ombra della tettoia è:
(A) circolare (B) a forma d'uovo (C) ellittica poco schiacciata
(D) ellittica molto schiacciata (E) rettangolare

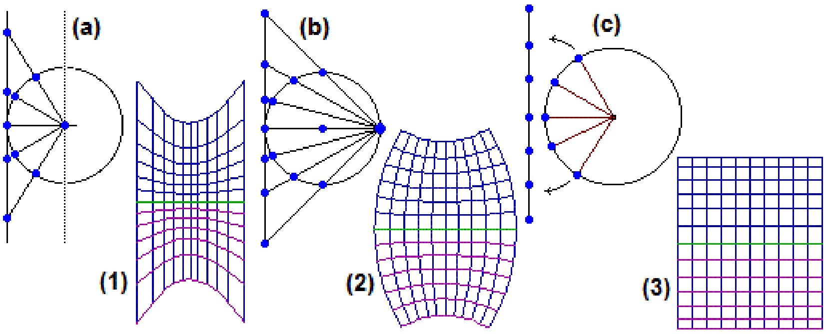
e3 Tra le seguenti condizioni, qual è quella in cui l'ombra di un'asta verticale collocata al centro di un piazzale di Genova o di Roma è più lunga?
(A) alle 12 a luglio (B) alle 12 a ottobre (C) alle 16 a luglio
(D) alle 16 a ottobre (E) alle 12 all'equinozio di primavera

e4 Considera la quadrettatura considerata prima del quesito [**1**]. Quale forma ha l'ombra che si ottiene se i raggi del sole sono inclinati di 45°, il vetro su cui è disegnata la quadrettatura è verticale e il cartoncino che raccoglie l'ombra è orizzontale?

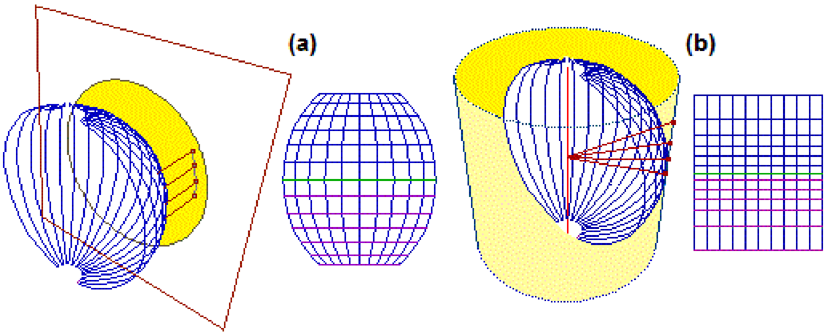
e5 Spiega come dalla figura **A** con una proiezione parallela si può ottenere la figura **A'**. Spiega come, analogamente, si può ottenere la figura **A"**.



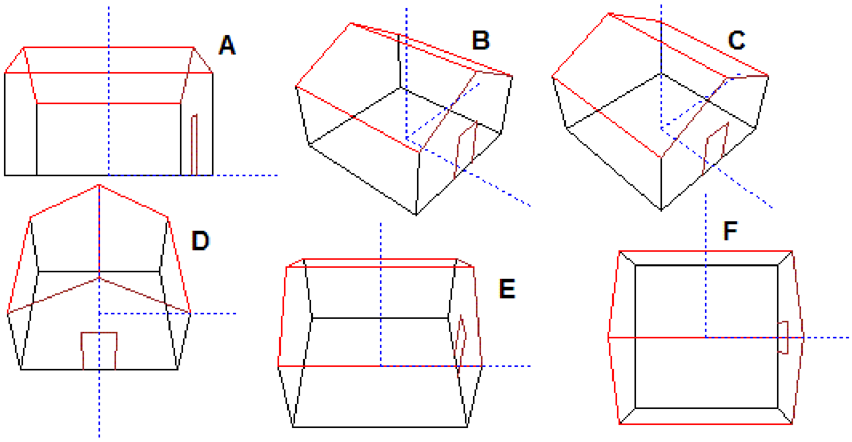
e6 Consideriamo (A) la proiezione dal centro su un piano tangente, (B) la proiezione perpendicolare su un cilindro circoscritto, (C) la proiezione su un piano tangente da un punto della sfera diametralmente opposto. Associa a ciascuna di queste tecniche di rappresentazione cartografica la corrispondente vista dall'alto (stando sopra ad un polo) e la corrispondente forma che assume mediante essa una particolare porzione (tagliata a metà dell'equatore) della superficie terrestre.



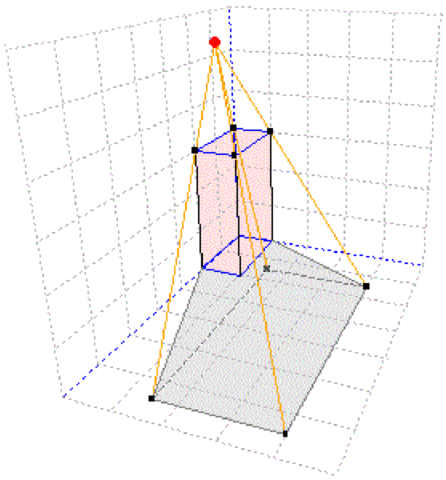
e7 Le figure seguenti illustrano due tra altri tipi di rappresentazioni cartografiche mediante proiezioni: (1) proiezione dal centro su un cilindro circoscritto, (2) proiezione perpendicolare su un piano tangente. Associa a ciascuna figura la corrispondente proiezione. Quale delle due proiezioni rappresenta con delle rette sia i paralleli che i meridiani? Con questa proiezione una rotta rettilinea che non sia lungo un parallelo o un meridiano è rappresentata da una retta?



e8 In A, B, C, D, E ed F è riprodotta una casetta, vista dai punti di vista (diretti verso l'origine) qui sotto indicati, riferendosi agli assi tracciati. θ indica la direzione nel piano x,y (0° direzione opposta all'asse y, 90° direzione dell'asse x), φ indica l'inclinazione (0° vista dal piano x,y, 90° vista verticale, dall'alto). Associa ai punti di vista la corrispondente immagine.
(1) θ=0°, φ=45° (2) θ=45°, φ=45° (3) θ=40°, φ=40° (4) θ=0°, φ=90° (5) θ=0°, φ=0° (6) θ=90°, φ=45°



e9 Facendo riferimento alla figura a lato, stabilisci le coordinate della lampadina che, del parallelepipedo rettangolo rappresentato, produce sul piano z=0 l'ombra disegnata (indichiamo con x, y e z le coordinate dello spazio raffigurato; i quadratini hanno lato 1).



e10 Cerca in rete il significato di: café wall illusion, Freemish crate, Hermann grid illusion, Kanizsa triangle, Penrose stairway, Penrose triangle, young girl-old woman illusion, Zöllner's illusion, e riassumilo complessivamente (in italiano) in 10 righe.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
isometria (§1), *proiezione parallela* (§1), *affinità* (§1), *proiezione centrale* (§1), *prospettiva* (§3), *punto di fuga* (§3)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol Istogramma RandomNum IntGauss AB3dim Casa3dim