Modelli matematici per l'economia

La matematica per le scelte di un'azienda e per l'interpretazione dei fenomeni economici

0. Introduzione

In questa scheda prendiamo in considerazione la matematica che un'azienda utilizza per gestire la sua attività tecnica ed economica: ne analizziamo il ciclo produttivo e gli scambi di denaro e di merce con altri soggetti economici. Studiando il modo in cui si formano il costo (e il prezzo) dei prodotti, affrontiamo anche l'analisi di alcune semplici situazioni economiche che si presentano nella vita quotidiana.

1. La formazione dei costi

Consideriamo una piccola ***casa editrice***. A destra *figura 1* illustra alcuni aspetti di una tipografia di alcuni secoli fa. Ai nostri giorni l'organizzazione del lavoro in una azienda di questo tipo è molto più complessa, sia per i macchinari che impiega che per i rapporti economici che intrattiene con altri soggetti. Tuttavia non cambia molto l'insieme dei passaggi attraverso cui gli elementi di input vengono trasformati in output, cioè nel prodotto finale, e che sono illustrati nel seguente diagramma:

figura 1

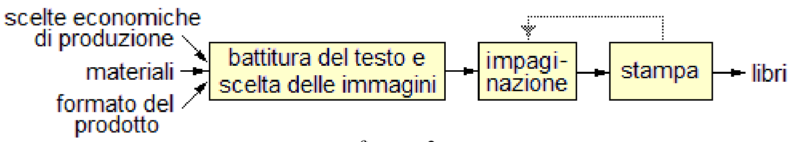


figura 2

L'attività consiste nella combinazione di input (fattori di produzione: materiali, macchinari, energia, testi, … e lavoro) e nella loro trasformazione in output (prodotti finiti: i libri). Per la produzione sono impiegati anche fattori non materiali: oltre al lavoro dei dipendenti (e dei proprietari che lavorano nella ditta) sono utilizzati la consulenza di un commercialista, servizi bancari e assicurativi, … La *figura 3* sintetizza (in modo un po' semplificato) ***ciò che entra e ciò che esce*** dalla azienda:

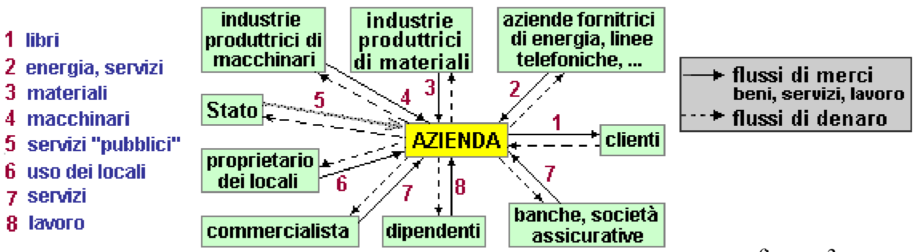


figura 3

le frecce indicano i flussi, i riquadri indicano i soggetti economici tra cui vengono effettuati gli *scambi*: i dipendenti forniscono lavoro e in cambio ricevono stipendi, industrie forniscono macchinari e materiali e vengono pagate in denaro, …

Nota. La freccia che entra nello ***Stato*** (inteso in senso lato, comprendendo anche Comuni, Regioni, …) in parte è costituita da ***tasse*** (tassa di circolazione per il furgone, tasse per l'autorizzazione a esercitare un'attività economica, bolli da applicare a documenti, …) e in parte da ***imposte***; quest'ultime non sono pagamenti di prestazioni specifiche, ma contributi al funzionamento generale dello Stato; possono essere "dirette" (se vengono commisurate alle capacità economiche del soggetto, "persona fisica" o "azienda", e pagate annualmente o in particolari scadenze) o "indirette" (se vengono pagate come quota fissa o percentuale applicata ad attività economiche indipendentemente dai soggetti che le svolgono, come l'imposta sui tabacchi, come l'iva – "imposta sul valore aggiunto", di cui vengono gravati i prezzi di vendita –, …).

La freccia che parte dallo Stato non è costituita, dunque, solo da controprestazioni ai versamenti in denaro dell'azienda, ma anche da benefici più generali di cui usufruiscono anche altre aziende e, più in generale i cittadini: la manutenzione delle strade (anche l'azienda le usa per i propri trasporti), l'istruzione (anche all'azienza servono dipendenti che abbiano le conoscenze di base e le conoscenze tecniche e scientifiche specifiche fornite dalla scuola), la salute (anche all'azienda serve che lo Stato si preoccupi della salute dei cittadini), … . Essendo una "freccia" un po' diversa dalle altre, la abbiamo tracciata con un "colore" diverso.

Tale freccia contiene anche una parte del "costo del lavoro": questo non è costituito solo dagli stipendi (la freccia "azienda"→"dipendenti") ma anche da contributi che l'azienda deve versare allo Stato e che sono destinati a coprire le spese per pensioni, indennità di disoccupazione, ….

Altri soldi che entrano nello "Stato" sono costituiti dalle ***tariffe*** che vengono pagate per l'erogazione di alcuni servizi da parte di aziende pubbliche; ma questi scambi fanno parte delle frecce che collegano l'azienda con "aziende fornitrici di energia, …".

Le frecce a *tratto continuo* sintetizzano gli aspetti *tecnici* della produzione, cioè la provenienza dei vari fattori che intervengono nel processo produttivo.

Le frecce *tratteggiate* sintetizzano gli aspetti più strettamente *economici*: le frecce che escono costituiscono le *spese* o ***costi***, la freccia che entra rappresenta gli *incassi* o ***ricavi***. Il *profitto* o ***guadagno*** è costituito dalla differenza tra l'incasso totale e il costo totale.

Le voci che concorrono a formare il ***costo*** *totale* di un libro sono di vario tipo (alcune, per semplicità, sono state trascurate nel grafo precedente):
(a) costo dei componenti
(b) costo del personale
(c) spese di affitto, luce, gas, acqua, pulizia,...
(d) costo per acquisto o noleggio di macchinari, mezzi di trasporto, computer,...
(e) tasse e imposte
(f) spese per il commercialista, per altre consulenze, …
(g) spese varie: cancelleria, manutenzione computer, …
(h) spese per ricerca e aggiornamento (libri, corsi di aggiornamento, congressi, …)
(i) interessi per prestiti bancari
(l) spese per la distribuzione (spese per spedizioni, benzina, …)
…

Rispetto a *un dato periodo di tempo*, ad esempio un anno, nel fare il *bilancio* dell'attività di una azienda, i costi possono essere distinti in:

• ***costi fissi***, che non variano al variare della quantità di beni prodotti (ad esempio le spese per il riscaldamento dei locali),

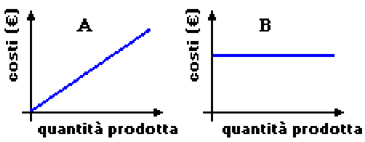
• ***costi incorporati***, la cui incidenza sul totale dei costi varia in funzione della quantità di merce prodotta (ad esempio il costo della carta).

Osserviamo che:

– a seconda del tipo di attività si possono considerare periodi diversi; ad esempio nel caso di una gelateria che assuma un dipendente in più, a tempo determinato, e noleggi ulteriori attrezzature solo per la stagione estiva, il costo del personale e per le attrezzature non può essere considerato fisso per l'intero anno;

– nel caso dell'acquisto di macchinari da utilizzare per più anni, il costo per l'acquisto viene ripartito (***ammortizzato***) sugli anni del previsto utilizzo, per cui in ogni bilancio annuale viene conteggiata solo una quota del costo.

1 Tra i due grafici a fianco, quale potrebbe rappresentare come variano i costi fissi annui di una azienda, quale come varia l'ammontare annuo dei costi incorporati? Perché?



2 *Classificate* le voci di spesa dell'azienda (descritte in precedenza) in costi incorporati e costi fissi (rispetto a un bilancio annuale). Avete perplessità in qualche caso? Quali ipotesi fareste per eliminarle?

La distinzione in costi fissi e costi incorporati può essere applicata anche ad aziende che producono servizi e ad attività economiche meno complesse.

Per capire meglio l'incidenza dei costi fissi e dei costi incorporati sui costi totali esaminiamo alcune situazioni particolarmente semplici, in cui il numero delle variabili è minore.

3 In una scuola si decide di noleggiare una fotocopiatrice il cui uso sia riservato alla riproduzione di materiali per gli alunni. La segreteria chiede a una ditta un preventivo di spesa. La ditta offre un canone mensile di 100 euro e le cartucce di toner al prezzo di 90 euro l'una. Ogni cartuccia fornisce 6000 copie (finito il noleggio l'eventuale cartuccia non completamente consumata viene rimborsata parzialmente). La carta, che la scuola acquista in grossi lotti, perché destinata anche ad altri usi, costa 0.006 euro (0.6 centesimi) il foglio.

Quali sono le voci di costo fisso mensile e quali quelle di costo incorporato tra quelle indicate nella tabella a lato? Quanto costerebbe il toner per una fotocopia?

	incorporato	*fisso*
noleggio	☐	☐
toner	☐	☐
carta	☐	☐

4 Una piccola azienda produce tappi di sughero. Spende 5 centesimi in materia prima (sughero) per ogni tappo prodotto e non ha altre voci di costo incorporato. Ha, poi, 30 mila euro di spese fisse all'anno. A quanto ammonta il totale dei costi sostenuti in un anno dalla azienda nel caso in cui essa produca 320 000 tappi?

Riferendosi a situazioni come queste, in cui viene prodotto *un solo tipo di bene* (fotocopie, tappi, gelato, …), fissato un dato periodo di tempo (mese, anno, …), siano:

n il *numero* dei "pezzi" (fotocopie, tappi, kg di gelato, …) prodotti nel periodo considerato
C_T il *costo totale* (in euro) corrispondente
C_F l'ammontare dei *costi fissi*
C_I il complesso dei *costi incorporati* in un pezzo

Riferiamoci al caso delle *fotocopie* (quesito 3).

Quanto varrebbe C_T se $n = 0$, cioè se non si effettuassero fotocopie nel mese considerato?
Evidentemente l'unica spesa consisterebbe nel canone mensile, cioè $C_T = 100$.

Quanto varrebbe C_T se $n = 1$, cioè nell'ipotesi che si facesse 1 sola fotocopia?

Al canone si aggiungerebbe il costo di 1 foglio (0.006 euro) e quello del toner per 1 fotocopia, che è pari a 90/6000 = 3/200 = 0.015 euro (1.5 cent.). Cioè (trascurando le spese per l'energia elettrica) si aggiungerebbe in tutto un costo incorporato C_I di 0.006+0.015 = 0.021 euro. Quindi C_T = 100+0.021 = 100.021.

Quanto varrebbe C_T se n = 2, cioè se si facessero 2 sole fotocopie?
Al canone occorrerebbe aggiungere il doppio di spese per carta e toner, cioè $C_I \cdot 2 = 0.021 \cdot 2 = 0.042$ (euro). Quindi $C_T = 100+0.021 \cdot 2 = 100.042$.

In generale: $C_T = 100 + 0.021 \cdot n$

$\boxed{5}$ Esprimi C_T in funzione di n nel caso della produzione annua dell'azienda del quesito 4.

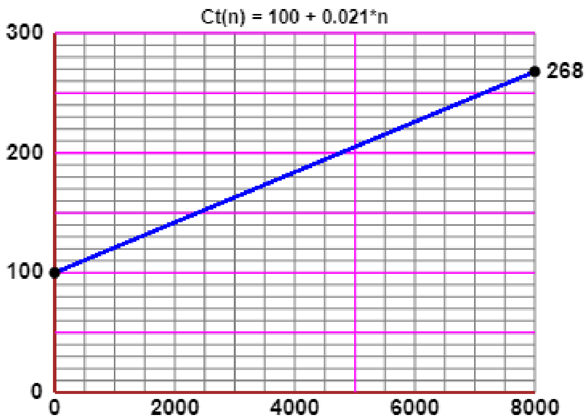
Quanto visto per il caso della fotocopiatrice e per quello della azienda produttrice di tappi può essere generalizzato a ogni azienda che abbia un solo tipo di prodotto:

$$\text{(\#)} \qquad \mathbf{C_T = C_F + C_I \cdot n}$$

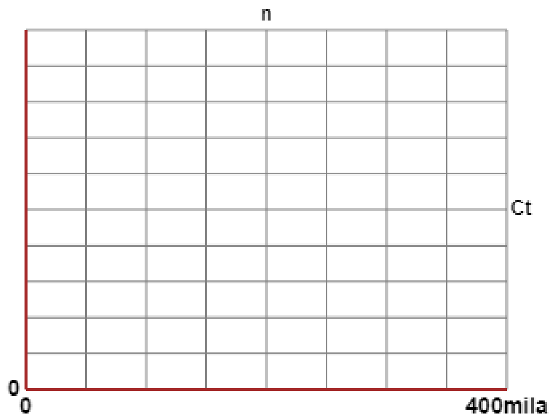
Nel caso di situazioni più complesse, come quella iniziale, in cui non si produce un solo tipo di prodotto, ma diversi, con costi differenti l'uno dall'altro, si dovrebbe considerare una formula più complessa, in quanto C_T dipende da n_1, n_2, … essendo n_1, n_2, … il numero dei prodotti del tipo 1, il numero dei prodotti del tipo 2, ….
Non siamo in grado, nella scuola secondaria superiore, di studiare modelli matematici adatti alla rappresentazione di queste situazioni. Ci accontenteremo, quindi, di analizzare casi modellizzabili con l'equazione (#).
Le riflessioni che svolgeremo, comunque, disponendo degli strumenti matematici adeguati, potrebbero essere facilmente adattate e generalizzate a situazioni più complesse.

In *figura 4* è rappresentato graficamente C_T in funzione di n (per $n \le 8000$) per il caso delle fotocopie discusso sopra. Il grafico ottenuto è un segmento di retta che parte dal punto (0, 100) – per $n = 0$ $C_T = 100$ – e ha pendenza 0.021. Il punto finale è (8000, 268): per $n = 8000$ $C_T = 100+0.021 \cdot 8000 = 100 + 21 \cdot 8 = 100+168 = 268$.

figura 4



$\boxed{6}$ Rappresenta graficamente C_T in funzione di n ($0 \le n \le 400000$) nel caso della azienda produttrice di tappi del quesito 4.



$\boxed{7}$ Riferendoti alla situazione del quesito 3 e della fig. 4

(1) Calcola quanto sarebbe il costo totale mensile se venissero effettuate 3000 fotocopie e segna il punto corrispondente sul grafico.
$C_T = \dots$

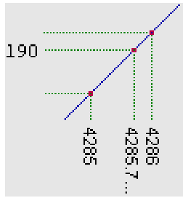
(2) Se la scuola decidesse di stanziare per le fotocopie degli studenti un tetto mensile massimo di 190 euro, quante fotocopie al mese si potrebbero effettuare al massimo? Ricava tale valore, arrotondato alle centinaia, graficamente.
$n = \dots$

(3) Risolvi il problema posto in (2) con metodi algebrici, risolvendo rispetto a n l'equazione seguente: $100 + 0.021 \cdot n = 190$. Confronta il valore ottenuto con quello ricavato graficamente.

$100 + 0.021 \cdot n = 190$	← equazione iniziale
...	← ho applicato "–100"
...	← ho applicato "·1000"
...	← ho applicato "/21"

Risolvendo il punto 2 del quesito precedente abbiamo trovato la soluzione arrotondata alle centinaia $n = 4300$. Nel punto 3 abbiamo invece ottenuto:
$n = 90000/21 = 30000/7 = 4285.7\ldots$.

Ma *ha senso una soluzione non intera*?



Nel risolvere algebricamente l'equazione $100 + 0.021 \cdot n = 190$ abbiamo interpretato n come variabile nell'insieme **R** dei numeri reali.
Nel "ritornare" al nostro problema dobbiamo tener conto che n può variare solo nell'insieme **N** dei numeri naturali.

Qual è, dunque, la soluzione al problema posto nel punto (2) del quesito?

Al massimo si possono realizzare 4285 fotocopie. Se si realizzassero 4286 fotocopie la spesa supererebbe 190 €.

Il modello matematico completo della situazione non è dato solo dall'equazione $C_T = 100+0.021 \cdot n$, ma anche dalla specificazione che n può assumere solo valori interi non negativi:

$$C_T = 100 + 0.021 \cdot n \quad \text{AND} \quad n \in \mathbf{N}$$

Ma ciò non basta. Occorre tener presente che non si può realizzare una quantità illimitata di fotocopie: se la macchina è in grado di realizzare *al massimo* 10 fotocopie al minuto, tenendola sempre in funzione non potrei realizzare più di $10 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 31 = 446400$ fotocopie al mese (ma a tale ritmo si guasterebbe prima …).
Quindi il modello dovrebbe essere:

$$C_T = 100 + 0.021 \cdot n \quad \text{AND} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{AND} \quad n \le 446400$$

In altre parole, 446400 fotocopie è la ***capacità produttiva*** *mensile* della nostra fotocopiatrice.

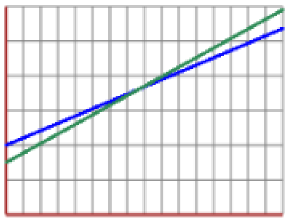
Nel caso di una azienda produttrice di beni, la *capacità produttiva* non dipende solo dai macchinari, ma anche dall'orario di lavoro, dal numero di addetti, …

$\boxed{8}$ Proseguimento del quesito 7:

(4) Un'altra ditta offre una fotocopiatrice al canone mensile di 75 euro. Una cartuccia di toner per questa fotocopiatrice costerebbe 107.5 euro e fornirebbe 5000 copie. Scrivi l'espressione di C_T in funzione di n in questo caso, calcola il valore di C_T per n=8000 e traccia il grafico di C_T in funzione di n sul sistema di riferimento di figura 4.

$C_T = \ldots$

(5) Se la scuola avesse intenzione di porre un tetto di 150 euro al mese, osservando i due grafici che ora hai in fig. 4 (e che dovrebbero avere un andamento simile a quello a lato) stabilisci quale delle due offerte converrebbe accettare (cioè in quale dei due casi si potrebbero fare con tale spesa più fotocopie).

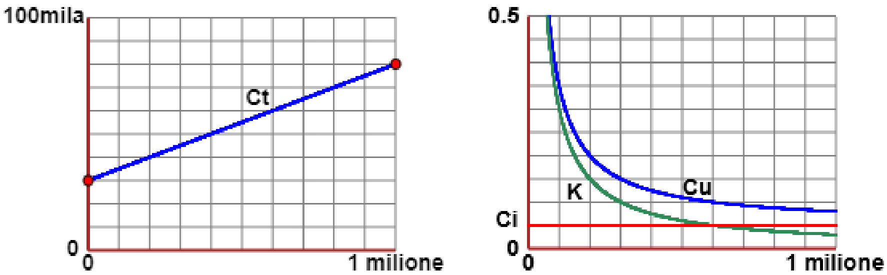


(6) Determina (con metodi algebrici) a partire da quale n incomincia ad essere più conveniente l'offerta della prima ditta (a cui corrisponde il grafico che parte da un punto sull'asse verticale più alto ma che ha una pendenza minore).

Riprendiamo in esame la *fabbrica di tappi* dei quesiti 4 e 6.

Supponiamo che abbia capacità produttiva di 1 milione di tappi all'anno. In *figura 5*, a sinistra, è tracciato il grafico di C_T in funzione di n per $n \in [0,1 \text{ milione}]$.

figura 5



Vediamo come al variare di n cambia il costo medio per produrre **un** tappo, cioè come varia la quantità C_T / n. Indichiamo tale quantità, chiamata ***costo unitario***, con C_U:

$$\mathbf{C_U} = \textit{costo unitario} = \mathbf{C_T} / \boldsymbol{n}$$

Il grafico di C_U in funzione di n è rappresentato nella parte destra di figura 5. Per calcolare C_U a mente o "a mano" conviene riscrivere C_T/n; infatti nel calcolo di $(30 \text{ mila} + 0.05 \cdot n)/n$ si moltiplica per n e poi si divide per n, mentre trasformando il termine in $(30 \text{ mila})/n+0.05$ si esegue solo la divisione. Più in generale il costo unitario è pari al costo incorporato in un pezzo (C_I) più una frazione dei costi fissi (C_F/n) che rappresenta quanto i costi fissi incidono su un singolo pezzo prodotto.

n	C_I	C_F	C_F/n	C_I+C_F/n
0	–	30000	–	–
100000	0.05	30000	0.3	0.35
500000	0.05	30000	0.06	0.11

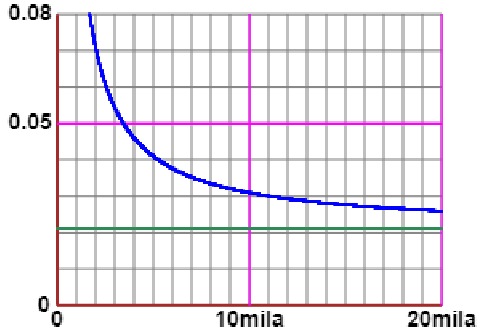
Nella tabella a lato è rappresentato il calcolo di C_U per alcuni valori di n. Per n=0 C_U non è definito ($C_F/0$ è indefinito, e, per altro, non ha senso considerare neanche C_I).

Evidentemente, l'incidenza dei costi fissi (C_F/n) è *inversamente proporzionale* a n.

1000000	0.05	30000	0.03	0.08
2000000	0.05	30000	0.015	0.065

In fig. 5 sono rappresentati anche C_I e C_F/n (la funzione K). Il fatto che C_U è pari a C_I+C_F/n corrisponde al fatto che il grafico di G è ottenibile traslando verticalmente di 0.05 (il valore di C_I) quello di K

Come si comprende sia dal grafico di G che dalla tabella, all'aumentare di n, C_U decresce: più cresce la produzione più la frazione di costo fisso si riduce, tendendo a diventare 0, per cui C_U tende a diventare uguale a C_I. Naturalmente, ciò vale se si prescinde dalla capacità produttiva della fabbrica: in realtà n non può aumentare indefinitamente.



9 Completa la tabella seguente riferendoti al caso della fotocopiatrice del quesito 3 e della figura 4 (C_T = 100+0.021n).

A lato è tracciato (in blu) il grafico di C_U in funzione di n. Che cosa rappresenta il grafico, verde, di H?

All'aumentare di n come si comporta il grafico di C_U?

n	C_I	C_F	C_F/n	C_I+C_F/n
2000				
4000				
8000				
20000				

2. La analisi degli utili

Se la fabbrica di tappi di fig. 5 pratica il ***prezzo*** di 0.105 euro il tappo, ha un ***ricavo*** (o *incasso*) ***unitario*** (in euro) $\mathbf{R_U}$=0.105, e, se n è il numero di tappi che vende, ha un ***ricavo totale*** annuo $\mathbf{R_T=nR_U}$

Ipotizzo che la ditta venda tutto ciò che produce, cioè che la quantità dei tappi prodotti sia uguale a quella dei tappi venduti.

In tal caso posso usare la stessa variabile ***n*** per entrambe le quantità.

I grafici di *figura 6* permettono di confrontare costi e ricavo, e di stabilire in quali casi la ditta è in *attivo* (incassa più di quanto spende) e in quali casi è in *passivo* (incassa meno di quanto spende).

Se n è piccolo i costi fissi sono ripartiti su pochi pezzi per cui C_U supera il prezzo, cioè il ricavo unitario R_U (→ sistema di riferimento in alto).

Ovverosia (→ sistema di riferimento in basso), se n è piccolo il ricavo totale totale R_T non riesce a compensare il totale dei costi C_T.

Nel primo sistema di riferimento sono confrontati costo e incasso unitari. Nel secondo sistema sono confrontati costo e incasso totali.

Da entrambi si ricava che se la ditta produce e vende solo 500 mila tappi è in passivo.

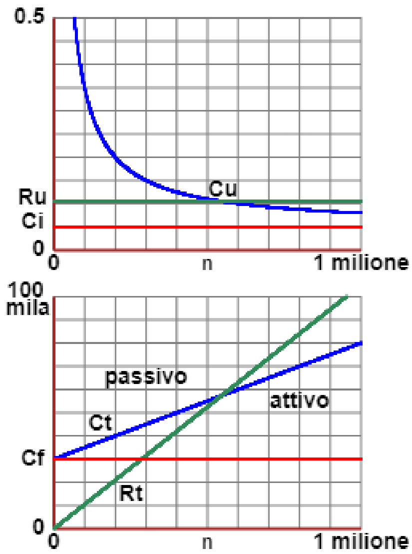


figura 6

10 Ricava, con metodi algebrici, quanto deve almeno valere n affinché la ditta sia in attivo.

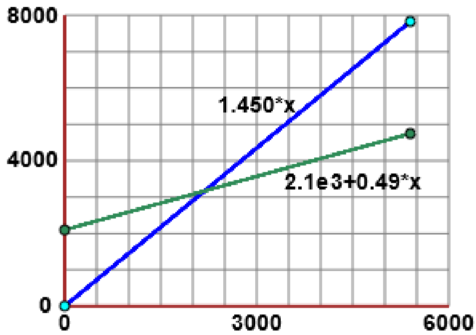
[*Traccia*.I grafici del 1° sistema di riferimento si intersecano per n tale che:

$R_U = C_U$ cioè quando $0.105 = 0.05 + (30 \text{ mila})/n$

quelli del 2° per n tale che: $R_T = C_T$ cioè quando $0.105n = 30 \text{ mila} + 0.05n$

Scegli l'equazione che ritieni più conveniente]

11 Un artigiano produce vasi in terracotta di un unico formato sostenendo (per locali, macchinari, …) un costo fisso *mensile* di 2100 euro e (per materie prime) un costo *incorporato* di 0.49 euro a vaso. Vende i vasi a 1.450 euro l'uno. Regola la produzione sulla base dell'andamento delle vendite, per cui posso indicare con la stessa variabile n sia la quantità dei vasi prodotti che quella dei vasi venduti. La *capacità produttiva* è di 5400 vasi al mese.



(**1**) Che cosa rappresentano i due grafici riprodotti a lato?

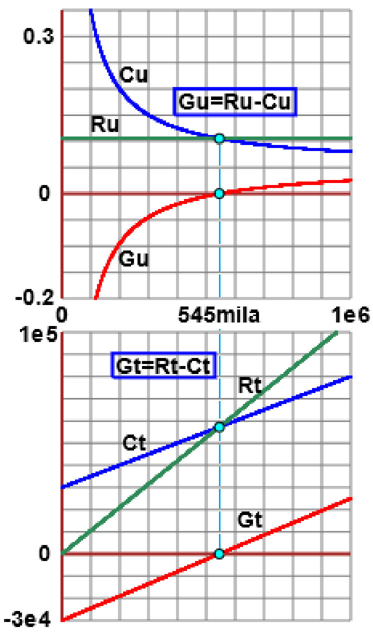
(**2**) Quali sono le coordinate dei quattro punti evidenziati?

x = 0 y = … x = … y = …

x = 0 y = … x = … y = …

(**3**) Ricava dal grafico il valore (arrotondato alle centinaia) di n per cui l'artigiano incomincia a coprire completamente le spese.

(**4**) Quanto può guadagnare, al massimo, il nostro artigiano?



Per visualizzare meglio come varia il ***guadagno*** (o ***utile*** o ***profitto***) al variare di n, invece di rappresentare i grafici del ricavo e dei costi (e vedere quando si incontrano, quando uno sta sopra all'altro, …), possiamo rappresentare direttamente il guadagno, cioè: *ricavo–spese*.

Se considero i valori unitari ho:

guadagno unitario = $\mathbf{G_U = R_U – C_U}$

Se considero i valori totali (nel periodo fissato) ho:

guadagno totale = $\mathbf{G_T = R_T – C_T}$

In *figura 7* sono rappresentati G_U e G_T in funzione di n.

Per n=545mila (circa) il guadagno è nullo; si è in *pareggio*: costi e ricavo si compensano.

All'aumentare di n $\mathbf{G_U}$ cresce, ma via via meno velocemente: la pendenza del grafico diminuisce. Ha un comportamento "rovesciato" rispetto a quello di C_U, che invece decresce.

Esplicitiamo la relazione tra G_U e n:

$$G_U = R_U – C_U =_{[1]} R_U – (C_I + C_F/n) =_{[2]} \mathbf{R_U – C_I – C_F/}\boldsymbol{n}$$

[1]: sostituisco a C_U la sua espressione in funzione di n, racchiudendola tra parentesi (perché?)

[2]: sottrarre una somma equivale a sottrarre gli addendi:
a – (b + c) → a – b – c

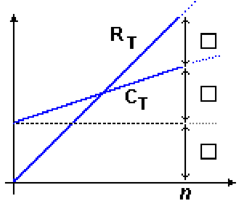
$\mathbf{G_T}$ cresce con aumenti proporzionali agli aumenti di n; ha infatti un grafico rettilineo. Algebricamente:

$$G_T = R_T – C_T = nR_U – (C_F + nC_I) = nR_U – C_F – nC_I =_{[*]} \boldsymbol{n}\ \mathbf{(R_U – C_I) – C_F}$$

[*]: raccolgo n a fattor comune

e questa relazione esprime una funzione lineare rispetto a n, cioè del tipo $n \to$ an + b.

12 I grafici seguenti sono riferiti alla produzione annua di una ditta che fabbrica un solo tipo di bene. Dato n sulla figura sono evidenziate le distanze tra i punti di ascissa n che stanno sull'asse orizzontale e sulle tre rette tracciate. *Associate* ad ogni distanza la corrispondente descrizione (tracciando una linea che congiunga i due quadratini corrispondenti).

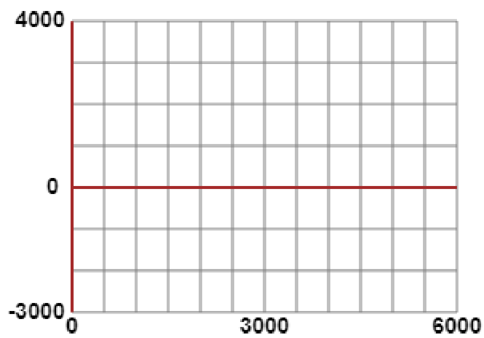


☐ costi fissi sostenuti nell'anno

☐ spesa annuale per materie prime e per altri costi incorporati

☐ guadagno annuale

13 Traccia, a lato, il grafico di G_T (guadagno totale mensile) in funzione di n (quantità di vasi prodotti nel mese) per il caso descritto nel quesito 11.



Da quanto abbiamo visto in questo paragrafo, sembrerebbe che un'impresa quanto più aumenta la propria ***dimensione*** (cioè la quantità e la qualità di attrezzature e macchinari, il numero dei dipendenti, …), accrescendo così la *capacità produttiva*, tanto più riduce i costi unitari e tanto più aumenta i profitti.

In effetti molte delle attuali grandi imprese alle origini erano imprese di piccole dimensioni che si sono man mano sviluppate attraverso un processo di:

ACCUMULAZIONE → INVESTIMENTI IN NUOVE TECNOLOGIE E NUOVI ADDETTI → AUMENTO DELLA PRODUZIONE E CONTENIMENTO DEI COSTI UNITARI → ACCUMULAZIONE DI MAGGIORI CAPITALI → ULTERIORI INVESTIMENTI → …

Tuttavia non tutte le grandi imprese hanno pian piano assunto una grande dimensione. Inoltre si verificano spesso casi di grandi imprese in crisi. *Come è possibile ciò*?

• Aumentare la produzione è legato alla *possibilità di vendere* i propri prodotti sul *mercato* ("mercato" inteso non come specifico luogo dove si vende – il mercato di piazza X, il supermercato Y, … –, ma come insieme di tutte le sedi in cui si volgono attività di compravendita): non si può espandere oltre ogni limite la vendita di prodotti di un certo tipo.

• Il guadagno G_T *dipende la prezzo* P_U, che l'azienda deve stabilire tenendo conto di numerosi fattori (concorrenza, domanda della merce, disposizioni di legge, …).

• Una piccola impresa X che produce il bene B e sta tentando di svilupparsi può essere messa in difficoltà dalla eventuale presenza di imprese di grandi dimensioni che producono il bene B e che decidono di abbassare temporaneamente i prezzi per mettere X in difficoltà (e possono permettersi di farlo perché dispongono di maggiori risorse, producono altri tipi di bene di cui possono aumentare leggermente il prezzo per compensare la diminuzione del prezzo di B, …).

• Alcune piccole imprese producono quasi solo accessori destinati a grandi imprese da queste utilizzati come componenti nella produzione di beni più complessi. L'espansione (o il ridimensionamento) di queste piccole imprese è fortemente legato alle sorti e alle scelte produttive delle imprese di cui sono fornitrici.

• A volte un'impresa di grande dimensione, nel caso di un forte calo della domanda o di un forte aumento del costo delle materie prime o di altri eventi, ha più difficoltà di una piccola impresa a modificare la propria produzione (infatti ha alti costi da ammortizzare in più anni).

• …

In definitiva, data la ***complessità della società attuale***, nel considerare le formule che esprimono il guadagno in funzione del volume di produzione *n* (le formule che abbiamo visto noi, o formule più complicate adatte al caso in cui l'impresa produce più tipi di beni), bisogna tener conto che vi sono numerosi *fattori che influiscono* sui valori di P_U, C_I e C_F e limitano la possibilità di variare *n*.

Le *formule* viste, comunque, se usate tenendo conto dei loro ***limiti***, permettono di studiare alcune particolari situazioni e permettono di mettere in luce e di affrontare una prima discussione sui meccanismi generali attraverso cui si formano i costi e i prezzi.

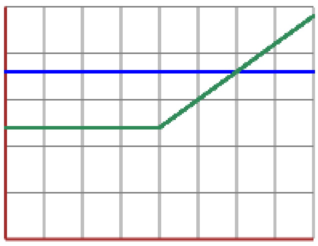
3. Problemi di scelta

Tra le varie decisioni che un'azienda deve compiere per organizzare le sue attività vi sono spesso delle scelte tra diverse alternative, per valutare qual è la più conveniente. Scelte di questo tipo vengono compiute frequentemente anche dalle persone per affrontare problemi di vario genere (scelta tra abbonamento o biglietti singoli, tra forme di vendita praticate da diversi concessionari auto, tra diversi piani tariffari offerti dai gestori telefonici, tra condizioni per la gestione dei conti correnti praticate da banche differenti, …).

Per fare un esempio consideriamo il problema della *distribuzione*.

Per consegnare i propri prodotti una ditta deve stabilire il tipo di trasporto più conveniente: aereo, treno, camion, nave,... Talvolta il mezzo di trasporto è obbligato: per una consegna rapida da Milano a New York è necessario l'aereo, ma a volte ci si può trovare di fronte a più alternative fra le quali decidere in base a uno o più criteri di convenienza come l'economicità, la velocità, l'affidabilità o la sicurezza.

Per affrontare scelte di questo tipo si usano metodi analoghi a quelli impiegati per affrontare la situazione presentata nel quesito 8 (quale fotocopiatrice noleggiare?): risoluzione di ***equazioni***, disequazioni, … . Consideriamo un altro esempio.



14 Una ditta di autonoleggio applica due diverse tariffe giornaliere per il noleggio di un furgoncino:
– la 1ª è 180 euro a chilometraggio illimitato,
– la 2ª è 120 euro fino a 200 km di percorrenza e 0.6 euro in più per ogni km ulteriore.

Individua nella figura a fianco i grafici delle due tariffe in funzione della percorrenza (in km) e indica opportunamente le *scale* scelte sui due assi.

Per quali percorrenze conviene la 2ª tariffa? (procedi sia usando il grafico sia con metodi algebrici)

Quali *funzioni* sono state scritte per ottenere questi grafici?

Consideriamo una scelta di un altro tipo.

Un *corriere*, partendo da Genova, sede della ditta, deve consegnare della merce a Torino, Como, Pavia, Brescia e Bologna, per poi tornare a Genova. Vuole scegliere il tragitto più breve, cioè a cui corrisponde la ***minima*** percorrenza.

	GE	TO	CO	PV	BS	BO
GE	0	170	185	125	230	295
T0	170	0	165	155	225	330
CO	185	165	0	85	110	260
PV	125	155	85	0	135	200
BS	230	225	110	135	0	190
BO	295	330	260	200	190	0

La tabella a lato contiene le distanze in chilometri tra le varie località. La tabella è simmetrica rispetto alla *diagonale* "000000" in quanto, nel caso di queste città, la distanza per raggiungere da una località A un'altra località B è uguale a quella per andare da B ad A (in presenza di strade a senso unico ciò potrebbe non accadere).

Quanti sono i tragitti tra cui può effettuare la scelta il corriere?

La sottostante *figura 8* illustra in dettaglio i percorsi che potrebbe compiere una volta che avesse scelto, fra le 5 alternative iniziali, di passare prima per Torino.

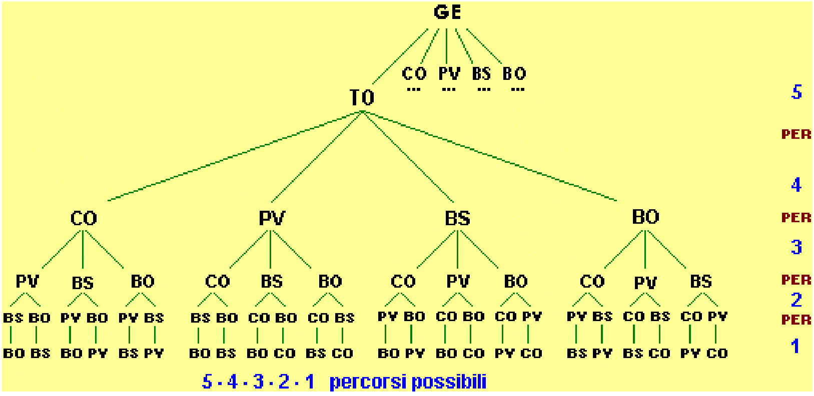


figura 8

I *percorsi possibili* sono complessivamente 120.

– Infatti (→ *figura 8*) da Genova posso *scegliere* come prima destinazione una qualsiasi tra le 5 località in cui consegnare la merce.

– Raggiunta una 1ª località, in uno dei 5 modi possibili, posso *scegliere* come tappa successiva una fra le 4 rimanenti.

– Raggiunta una 2ª località, in uno dei 5·4 modi possibili, posso scegliere come tappa successiva una tra le 3 rimanenti.

– Raggiunta una 3ª località, in uno dei 5·4·3 modi possibili, posso scegliere come tappa successiva una tra le 2 rimanenti.

– Raggiunta una 4ª località, in uno dei 5·4·3·2 modi possibili, mi rimane 1 sola scelta: raggiungere l'ultima località (e, poi, tornare a Genova).

– Quindi i modi in cui (partendo da Genova) posso passare per le 5 località, ossia i modi in cui dal nodo iniziale del grafo di fig.8 posso arrivare a un nodo finale, sono 5·4·3·2·1, cioè 120.

Per risolvere il problema possiamo elencare tutti i 120 percorsi possibili, calcolare la lunghezza di ognuno e stabilire quale percorso è più breve. Disponendo di una cartina si possono, comunque, escludere a priori, senza fare calcoli, molti percorsi che, con valutazioni geometriche intuitive, possono essere ritenuti sicuramente più lunghi di altri. Nel caso in cui le località da raggiungere siano più numerose, avremmo tuttavia in ogni caso da compiere molti calcoli.

Procedere "a mano", anche usando una CT, richiederebbe una quantità di tempo enorme. Per affrontare problemi di questo tipo è di grande aiuto il *calcolatore*: con un programma (vedremo nei prossimi anni come realizzarlo) si può:

– elencare uno ad uno ogni percorso possibile,

– calcolare la lunghezza L di esso,

– confrontarla con la minima lunghezza M trovata esaminando i percorsi precedenti,

– nel caso in cui L sia minore di M assumere L come nuova lunghezza minima M,

– e così via.

Nel caso del nostro corriere si trova che il tragitto più breve (di 960 km) è GE-TO-CO-BS-BO-PV-GE, o il tragitto inverso GE-PV-BO-BS-CO-TO-GE.

15 Quanti sarebbero i percorsi da esaminare per individuare il tragitto più breve se il nostro corriere dovesse fare una consegna anche ad Alessandria?

Nel caso in cui le località da raggiungere siano 8 abbiamo:

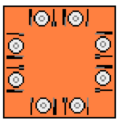
– 8 possibilità per la località "1" (cioè per la prima località per cui passare);

– qualunque sia stata la prima scelta abbiamo poi 7 possibilità per la località "2", e, quindi, le prime due località possiamo sceglierle in 8·7 modi;

– …

– alla fine l'ottava scelta è obbligata, cioè abbiamo 1 sola possibilità, e, quindi, le 8 località possiamo raggiungerle in 8·7·…2·1 percorsi diversi.

$$\overset{\bullet}{8} \cdot \overset{\bullet}{7} \cdot \overset{\bullet}{6} \cdot \overset{\bullet}{5} \cdot \overset{\bullet}{4} \cdot \overset{\bullet}{3} \cdot \overset{\bullet}{2} \cdot \overset{\bullet}{1}$$



16 (**1**) Quanti sono i modi diversi in cui posso disporre 8 persone a tavola?

(**2**) Quanti sono i possibili ordini di arrivo in una gara di corsa con 7 concorrenti (supponendo che nessuno si ritiri o sia squalificato)?

(**3**) Quanti sono gli "anagrammi" (anche senza significato in italiano) di ROMA?

Gli esempi visti possono essere ricondotti al seguente problema:

in quanti modi posso stabilire un ordine in un insieme di n *oggetti?*

Nel caso del corriere l'insieme è costituito dalle 5 (dalle 6 nella situazione del ques. 15) località da raggiungere. Nel caso dei posti a tavola l'insieme è quello dei commensali. Nel caso della gara è l'insieme dei concorrenti. Nel caso degli anagrammi sono le lettere (tutte distinte) di ROMA.

La risposta, come abbiamo visto, è: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ovvero $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ (**$**)

La funzione che a n numero naturale associa la quantità dei modi in cui posso ordinare un insieme di n oggetti viene chiamata ***fattoriale***. Il fattoriale di n viene usualmente indicato con $n!$. Quindi:

$1! = 1$ $2! = 2 \cdot 1 = 2$ $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Il nome deriva dal fatto che il fattoriale di *n* se *n*>0 è il risultato della moltiplicazione che ha come *fattori* tutti i numeri interi positivi minori o uguali a *n*.

2! = 2. Infatti per stabilire un ordine in un insieme costituito da 2 oggetti A e B posso considerare sia la sequenza A,B che la sequenza B,A.

1! = 1. Infatti nel caso di un insieme costituito da 1 solo oggetto A non posso fare altro che considerare la sequenza A.

E nel caso di un insieme costituito da 0 oggetti, cioè nel caso dell'insieme vuoto? L'unica sequenza è la sequenza vuota. Pongo quindi anche ***0! = 1***.

Quest'ultima condizione, assieme a ($), ci permette di calcolare il fattoriale di *n* per ogni numero naturale *n*. Per definire il fattoriale senza usare i puntini "…", presenti in ($) (che lasciano "intuire" al lettore che cosa ci va in mezzo, ma che non lo precisano rigorosamente), posso descrivere l'algoritmo che lo calcola in modo più rigoroso.

17 La nostra "**grande CT**" dispone del tasto **[!]** per calcolare il fattoriale. Usala per completare:

`!(5) = …` `!(10) = …` `!(20) = …` `!(40) = …`

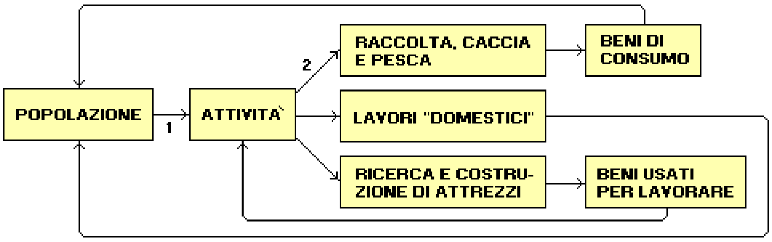
Quindi calcola 40! per esteso con lo script **factorial**.

4. Grafi e statistica

I ***grafi***, oltre che per indicare il ciclo produttivo di un'azienda, gli scambi economici di un'azienda, … (vedi figure 2 e 3) possono essere usati per illustrare l'*organizzazione economica di **società preindustriali***, la cui complessità è molto inferiore a quelle delle società in cui viviamo noi: è paragonabile alla complessità di una piccola azienda.

La complessità del grafo di ciò che entra e esce da una azienda ci fa immediatamente capire che sarebbe impossibile schematizzare con un grafo analogo l'intera rete di scambi economici che avvengono in una società industriale.

Il grafo seguente descrive le attività economiche di una *società che viveva di caccia e raccolta*:



La popolazione della comunità lavora (freccia 1) svolgendo tre principali attività:

– raccoglie prodotti naturali, caccia e pesca (freccia 2) per procurarsi (freccia 5) beni di consumo (alimenti, frutta, radici, carne, …; vestiario: pelli, fibre vegetali, …), cioè beni che consuma per sopravvivere (freccia 8);

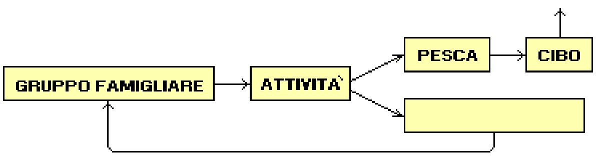
– svolge (freccia 3) tutta una serie di attività "domestiche" (allevamento dei bambini; costruzione o riparazione delle abitazioni: grotte, capanne, …; cottura e preparazione dei cibi; …) necessarie alla sopravvivenza della comunità e al mantenimento dei suoi livelli di vita (freccia 6);

– e (freccia 4), man mano che si logorano o si perdono, ricerca e costruisce nuovi attrezzi, cioè (freccia 7) beni non destinati a un consumo diretto, ma all'impiego per altre attività (bastoni, asce e mazze rudimentali, lance di legno, pietre e ossa lavorate per preparare cibi, ciotole ricavate dalla pietra, …), ossia a concorrere (assieme alle energie, alle idee, … fornite dai membri della comunità: freccia 1) alla realizzazione dei lavori domestici, della caccia, … (freccia 9).

18 *Completa*, sul grafo precedente, la numerazione delle frecce.

19 Secondo voi, *quali* semplificazioni dovrebbero essere apportate al grafo precedente per ottenere una rappresentazione di come una *famiglia di pinguini* provvede al proprio mantenimento (nel caso dei pinguini le attività necessarie al mantenimento vengono gestite dai singoli gruppi famigliari, composti da coppia e piccoli, a differenza, ad esempio, di quanto accade per gli elefanti, che le gestiscono a livello di branco)?

Per rispondere *completate* il grafo che segue (occorre far proseguire una freccia e mettere una opportuna scritta in un riquadro) e descrivete a parole le principali differenze rispetto al grafo precedente.

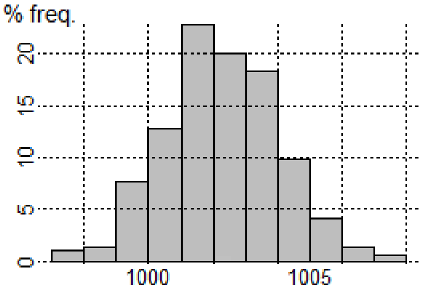


Nella gestione delle attività di una fabbrica, di una banca, … o di entità più complesse (una multinazionale, uno stato, …) intervengono molti altri strumenti matematici rispetto a quelli che abbiamo considerato in questa scheda. Alcuni li studierai negli anni prossimi.

Richiamiamo, qui, con un paio di esempi, alcuni impieghi della ***statistica***.

20 Una fabbrica produce farina in confezioni di diversi tipi (da 1 kg, da 1/2 kg, …).

L'immissione della farina nelle confezioni viene effettuata da un dispositivo regolabile di grammo in grammo. Quando è posizionato su 1000 g (o su 500 g o …) fa scendere in ogni confezione circa 1 kg (1/2 kg, …) di farina, con piccole variazioni in più o in meno, diverse da una confezione all'altra.



Poiché, per legge, in una confezione deve essere presente una quantità di prodotto non inferiore a quella dichiarata sulla confezione stessa, quando si vogliono realizzare confezioni da 1 kg il dispositivo viene posizionato non su 1000 g, ma su un valore leggermente più alto.

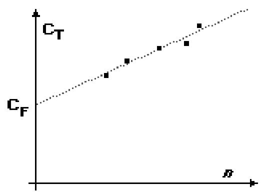
A fianco è riprodotto l'istogramma di distribuzione del peso della quantità di farina immessa quando il dispositivo è posizionato su 1002 g. L'istogramma è il frutto di qualche centinaia di prove.

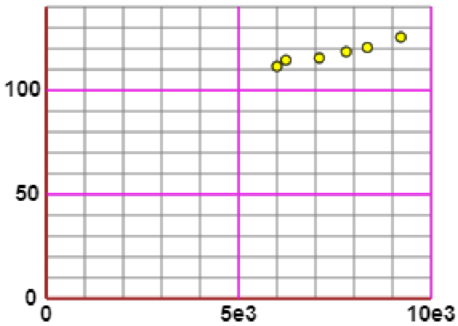
Dall'istogramma si ricava, ad esempio, che circa il 23% delle confezioni contiene tra 1001 e 1002 grammi di farina, cioè che il peso in grammi della farina di una confezione 23 su 100 cade nell'intervallo [1001, 1002).

Qual è la probabilità che una confezione, presa a caso, contenga meno di 1000 g (così che, nel caso di un controllo, l'azienda sia punita con una multa)?

21 Una grande fabbrica di automobili è organizzata in diverse unità produttive, ciascuna con una propria contabilità economica. I dirigenti della fabbrica, a seconda delle esigenze di mercato, danno delle indicazioni di massima su quanto le diverse unità produttive devono realizzare. Le unità produttive possono gestire un certo monte ore di straordinario, stabilire dei premi di produzione, …, e possono richiedere materiali, pezzi di ricambio, interventi di manutenzione, … . Ogni unità produttiva mese per mese deve fare il conto di quanto ha speso complessivamente (in personale, materiali, energia, …).

In una produzione complessa è difficile separare e conteggiare in modo preciso costi fissi e costi incorporati. Per superare questo ostacolo, i dirigenti decidono di individuare, approssimativamente, costi fissi e costi incorporati in questo modo: rappresentare graficamente le coppie (n,C_T) (n numero di auto prodotte, C_T costi totali) relative ai vari mesi, cercare una retta che approssimi bene questi punti, dalla intersezione di questa retta con l'asse verticale ricavare una stima dei costi fissi: vedi il grafico sotto a sinistra.





Sopra a destra sono tracciati i punti (n,C_T) relativi a una unità produttiva corrispondenti a 6 mesi particolari. In ascissa è indicato il numero di automobili, in ordinata sono indicati i costi espressi in milioni.

Ricava una stima dei costi fissi di questa unità produttiva.

Nel quesito 20 hai fatto delle valutazioni probabilistiche; nell'unità didattica *La matematica tra gioco e realtà* approfondirai i collegamenti tra analisi statistiche e considerazioni probabilistiche.

Nel quesito 21 hai cercato di individuare "a occhio" la retta che, secondo te, "meglio approssima" i punti tracciati; esistono delle tecniche matematiche (di tipo statistico-probabilistico) che consentono di procedere in modo meno "personale"; studierai queste tecniche nel triennio.

5. Esercizi

e1 Nel paese XX, in cui l'unità monetaria è il Din, la bolletta di pagamento bimestrale di una compagnia telefonica comprende 185 Din di canone di abbonamento, 6 Din per la spedizione della bolletta, 30 Din di imposte, e il costo degli "scatti" (pari a 10 sec di conversazione): ogni scatto costa 1.4 Din, ma sui primi 60 scatti viene praticato uno sconto di 0.8 Din e dal 61° al 120° scatto uno sconto di 0.4 Din. • A *quanto* ammonta la spesa fissa a bimestre? • *Fai* il grafico del costo della bolletta in funzione del numero N degli scatti ($0 \le N \le 500$). • Il costo unitario (costo totale diviso per il numero degli scatti) *è maggiore* se si fanno 200 scatti o se si fanno 50 scatti?

e2 *Rappresenta* su un opportuno sistema di riferimento (su carta millimetrata) il grafico della funzione F:x → 4.7+2.5x per x che varia nell'intervallo [0,1000]. *Trova* graficamente (approssimati alle decine), se esistono, quali valori (appartenenti a tale intervallo) devono essere assegnati a x per ottenere gli output 1745, 3.5, 1000, 3015. *Scrivi* e *risolvi* opportune equazioni per determinare algebricamente gli stessi valori.

e3 Se la funzione F del quesito e2 rappresenta matematicamente come variano i costi di produzione (in migliaia di euro) di un oggetto al variare della quantità di oggetti prodotti, risolvi i seguenti problemi:
– *qual* è il numero massimo di oggetti che possono essere prodotti per contenere i costi entro 1 milione (1000 migliaia di euro)?
– *qual* è il minimo numero di oggetti prodotti per cui i costi superano 1745000 euro?

e4 *Rappresenta* su un opportuno sistema di riferimento (su carta millimetrata) il grafico delle funzioni F:x → –156+15x e G:x → –85+9x per x che varia nell'intervallo [0,12]. *Trova* graficamente (approssimato ai decimi), se esiste, per quale input (appartenente a tale intervallo) le due funzioni hanno lo stesso output. *Qual* è il minimo *n* intero per cui F(*n*)>G(*n*)?

e5 *Rappresenta* su carta millimetrata (su un sistema di riferimento in cui x vari tra 0 e 10 e y vari tra -20 e 20) il grafico di F:x → 12/x, G:x → F(x)+5, H:x → 2–F(x) e G:x → 4 per x>0. I grafici di F, G e H *intersecano* tutti il grafico di K ?

Se come K considero la funzione così definita: K:x → w (dove w è un generico numero), *quale* valore deve avere w affinché il grafico di K intersechi quello di F (per x>0)? *E* affinché intersechi quello di G? *E* quello di H?

e6 Realizza un programma per calcolare il costo di una corsa in taxi nel comune YY, dove valgono le seguenti tariffe: 1 euro per ogni corsa, 1 euro in più se il giorno è festivo, 1 euro in più se l'orario è notturno, 1.5 euro per ogni passeggero, 0.2 euro ogni minuto di corsa, 0.1 euro ogni 200 metri di strada.

e7 Siano F(x)=5+7x e G(x)=20+4x. *Traccia* il grafico di F per x compreso tra –5 e 10 e quello di G per x compreso tra 10 e 20. I due grafici *si raccordano*? In caso affermativo, *motiva* la risposta; altrimenti *stabilisci* che cosa devi mettere al posto di 20 (nella definizione di G) affinché si raccordino.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei termini:
costi fissi e incorporati (prima di ques.1), *capacità produttiva* (prima di ques.8), *costo unitario* (dopo ques.8), *ricavo unitario e totale* (inizio §2), *guadagno unitario e totale* (dopo ques.11), *fattoriale* (dopo ques.16).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici divisori Indet distanza Triang factorial