Gli integrali

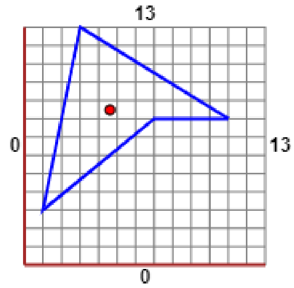
Come valutare somme di quantità variabili, estensioni di superfici, …?
Come trovare una funzione conoscendo la velocità con cui varia?

[0.](#) *Introduzione*
[1.](#) *Calcolare l'area sotto al grafico di una funzione*
[2.](#) *La formula fondamentale del calcolo integrale*
[3.](#) *Alcuni esempi*
[4.](#) *Approfondimenti*
[5.](#) *Esercizi*
➜ *Sintesi*

0. Introduzione

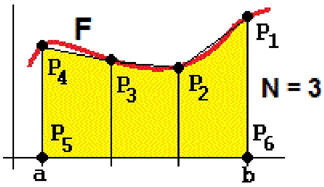
In questa scheda affronteremo due problemi:
– come calcolare l'area di una figura a contorno non poligonale, generalizzando idee e tecniche messe a punto nella prima scheda sulle *figure piane,*
– come trovare una funzione conoscendo il modo in cui varia (leggendo al passare del tempo il tachimetro di un'automobile - se il contachilometri è rotto - come posso calcolare la quantità di strada via via percorsa?).
Sono problemi apparentemente lontani, ma vedremo (affrontando il cosiddetto "teorema fondamentale") come essi siano invece strettamente collegati.

1. Calcolare l'area sotto al grafico di una funzione

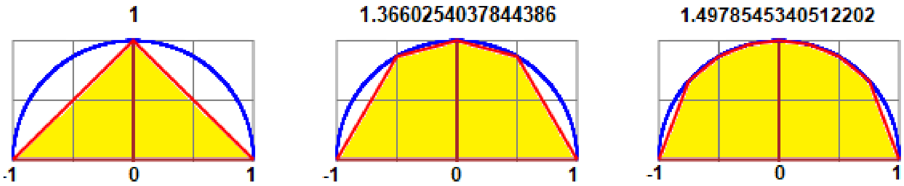


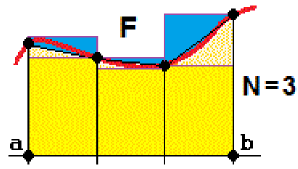
Abbiamo già visto ➜ nella scheda 1 di ***Figure piane*** come calcolare l'area di una figura poligonale facendo la somma delle aree dei triangoli in cui può essere scomposta, e abbiamo visto come questo procedimento può essere automatizzato con lo script **[Poligono](#)**:
nel caso del poligono raffigurato a fianco, avente per vertici i punti (11,8), (3,13), (1,3) e (7,8), otteniamo:

```
nx = 5     11, 3, 1, 7, 11
ny = 5     8, 13, 3, 8, 8
area = 35
perim   = 31.44226983514883
xcenter = 4.619047619047619
ycenter = 8.476190476190476
```

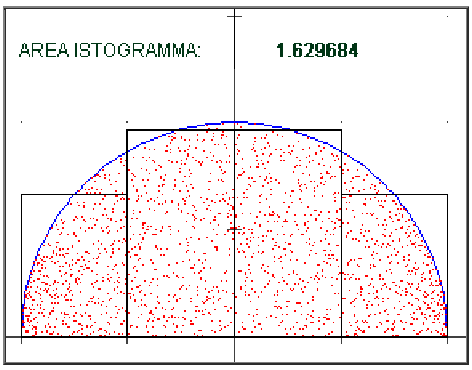


In modo del tutto simile possiamo calcolare l'area che sta tra il grafico di una funzione **f** e l'asse delle x, per x che varia tra **a** e **b**, approssimando questa con l'area del poligono P1P2…P6 ottenuto suddividendo [**a**,**b**] in **3** parti uguali, chiamando P1, P2, P3 e P4, in verso antiorario, i punti corrispondenti del grafico e chiamando P5 e P6 i punti dell'asse x di ascissa **a** e **b**, e, in generale, considerando **N** parti invece di 3.
Vediamo come potremmo ritrovare l'area del semicerchio. Aumentando il numero delle parti ci avvicineremmo sempre più a $\pi/2 = 1.570796\ldots$

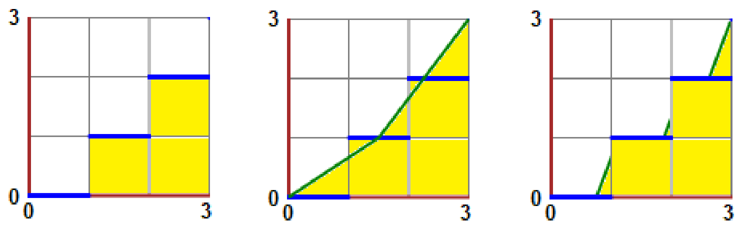




Abbiamo visto ➜ nella scheda su ***Il concetto di limite*** che se una funzione è continua in un intervallo [**a**,**b**] all'infittire degli input gli output sono man mano più fitti, cioè al tendere a 0 della distanza tra due qualunque input anche la distanza tra i loro output tende a 0. Nel caso della funzione F raffigurata all'inizio del paragrafo abbiamo che la striscia al cui interno sta il grafico di F, e che contiene la poligonale che approssima il grafico, ha spessore che all'aumentare di N tende a 0. Quindi l'area del poligono, all'aumentare di N si stabilizza su un numero reale, che assumiamo come valore dell'area sottesa al grafico di F.

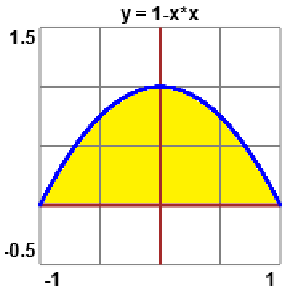


Invece che congiungere i vertici ottenendo una poligonale avrei potuto prendere rettangolini aventi per altezza il valore della funzione nel centro di essi, come nella figura qui a fianco, relativa alla stessa funzione considerata sopra: abbiamo una sequenza di istogrammi la cui area è una successione di valori che anche in questo caso tende a $\pi/2$.



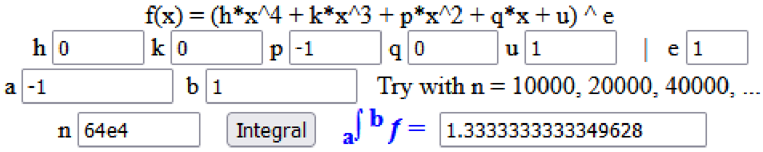
La figura sopra a destra illustra il caso di una funzione definita in un intervallo che è l'unione di intervallini in cui la funzione è continua e limitata; quella qui rappresentata è la funzione parte intera, ma potrebbe essere anche un'altra funzione "continua a tratti". La figura al centro visualizza che cosa si ottiene col primo procedimento per N=2, la figura a destra visualizza ciò che si ottiene per N=8.

Lo script **IntegrPol** automatizza il procedimento della ricerca dell'area delimitata da una funzione polinomiale o una potenza di essa attraverso l'approssimazione del suo grafico con un istogramma man mano più fitto. Il nome contiene "Integr", infatti il calcolo dell'area tra un grafico e l'asse x si chiama ***integrazione***. Su questo ritorneremo tra poco.



Vediamo come con questo script possiamo calcolare l'area tra la parabola y = 1-x^2 (raffigurata a destra) e l'asse x. Sappiamo che l'area deve essere di poco maggiore di quella del triangolo avente la stessa base e altezza 1, ossia deve essere un po' più grande di 1. Ecco alcune uscite:

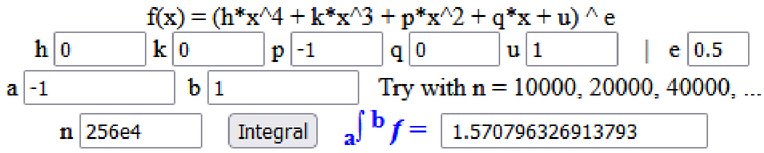
```
2                    n = 1
1.5                  n = 2
1.375                n = 4
1.3333333399999985   n = 1e4
1.333333333750011    n = 4e4
1.3333333333593749   n = 16e4
1.3333333333349628   n = 64e4
```



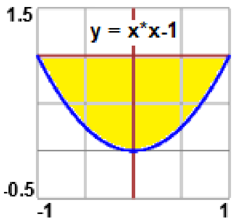
Si intuisce facilmente che l'area deve essere uguale a 1+1/3, ossia 3/3+1/3 = 4/3.

Rivediamo il caso del **semicerchio**:

```
1.5707968138960287   n = 1e4
1.5707963876831614   n = 4e4
1.5707963344059523   n = 16e4
1.5707963277462433   n = 64e4
1.570796326913793    n = 256e4
```



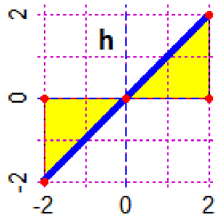
Fermandomi qui posso prendere l'approssimazione 1.570796327 (e so che π/2 = 1.570796326794896…).



$\boxed{1}$ Prova a calcolare analogamente l'*integrale* tra -1 ed 1 della negazione della funzione precedente, ossia della funzione $x \to x^2-1$, il cui grafico è tracciato a fianco.
Che cosa ottieni per n = 10 mila e per n = 640 mila?

L'integrazione calcola le ***aree orientate***: positive se stanno sopra all'asse x, negative se stanno sotto ad esso. Le "aree" delle due superfici sono invece entrambe positive.

$\boxed{2}$ Sia **h** la funzione rappresentata graficamente a fianco.
(1) Quanto vale, per un generico input x, **h**(x)?
(2) Secondo te quanto vale l'area orientata tra il grafico di **h** e l'asse x (al variare dell'input tra −2 e 2)?
(3) Controlla la risposta usando lo script illustrato in precedenza.



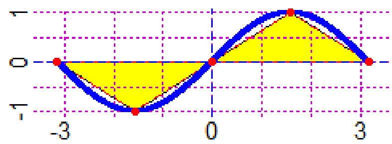
Dato un intervallo finito [a,b] e una funzione F che sia continua in [a,b], o che sia ivi limitata e continua in un insieme finito di intervalli la cui unione sia [a,b], l'area orientata tra grafico di F ed asse x viene chiamata ***integrale di F tra a e b*** e indicata $\int_{[a,b]} \mathbf{F}$ o $\int_a^b \mathbf{F}$, o, per comodità, ${}_a\int^b \mathbf{F}$.

Se la funzione F è descritta esplicitamente si usa una notazione in cui compare un nome per la variabile. Ad esempio nel caso considerato nel quesito 1 posso scrivere ${}_{-1}\int^1 \mathbf{x^2\text{-}1}\ \mathrm{dx}$ (o ${}_{-1}\int^1 \mathbf{u^2\text{-}1}\ \mathbf{du}$ o …).

Il simbolo $\int$ ha la forma di una "S" allungata. Infatti ricorda che l'area che sta sotto alla curva può essere approssimata **s**ommando opportuni rettangoli o trapezi.

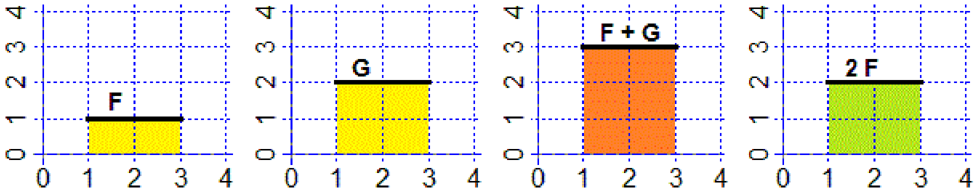
$\boxed{3}$ Quanto vale ${}_0\int^2 \mathbf{x}\ \mathrm{dx}$?

$\boxed{4}$ Quanto vale ${}_{-\pi}\int^{\pi} \mathbf{sin}$? [tieni conto che il grafico della funzione è simmetrico rispetto al punto (0,0)]



La figura seguente illustra due proprietà degli integrali, simili a proprietà che abbiamo visto per le derivate, che useremo spesso (k è un numero reale):

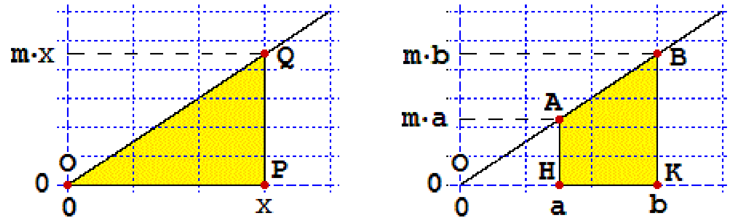
$$\int_{[a,\,b]} (\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \int_{[a,\,b]} \mathbf{F} + \int_{[a,\,b]} \mathbf{G} \qquad\qquad \int_{[a,\,b]} (\mathrm{k}\ \mathbf{F}) = \mathrm{k}\int_{[a,\,b]} \mathbf{F}$$



2. La formula fondamentale del calcolo integrale

Costruire approssimazioni successive, man mano più precise, è un operazione comoda per calcolare singoli integrali, se si dispone di un computer. Vedremo in questo paragrafo che in molte situazioni (**ma** non in tutte) si può ricorrere ad un metodo più semplice, che ci consente di valutare gli integrali utilizzando opportune formule. Nel paragrafo "approfondimenti" faremo qualche considerazione storica sull'origine di questo metodo.

Illustriamo il metodo con un esempio. Consideriamo la funzione $x \to \mathbf{m}\cdot x$. Sotto a sinistra ne è rappresentato il grafico. Vediamo come determinare l'area della figura illustrata sotto a destra, ossia $\int_a^b \mathbf{m}x\,dx$, con una formula.



L'area tra grafico ed asse orizzontale che va dall'ascissa 0 all'ascissa x è quella di un triangolo con base x ed altezza $\mathbf{m}\cdot x$, cioè $1/2\cdot\mathbf{m}\cdot x^2$. Quella che va dall'ascissa **a** all'ascissa **b** è, evidentemente, la differenza tra l'area del triangolo BOK e quella del triangolo AOH: $1/2\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{b}^2 - 1/2\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}^2$.

Ma $D_x\,(1/2\cdot\mathbf{m}\cdot x^2) = \mathbf{m}\cdot x$, ovvero $1/2\cdot\mathbf{m}\cdot x^2$ è un'antiderivata (rispetto ad x) di $\mathbf{m}\cdot x$.

In definitiva $\int_a^b \mathbf{m}x\,dx = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$, dove F è un'antiderivata di $x \to \mathbf{m}\cdot x$ (il concetto di *antiderivata*, o *primitiva,* di una funzione è stato introdotto alla fine del §2 della scheda sulla ➔ **derivazione**).

La cosa potrebbe essere dimostrata in generale:

*sia **f** continua in [a, b]; se **G' = f** allora* $\int_{[a,\,b]} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}(b) - G(a)$

Questa proprietà viene chiamata ***formula fondamentale del calcolo integrale***.

Proviamo ad usare questo metodo per calcolare l'intregrale tra −1 ed 1 di $x \to 1\text{-}x^2$, che abbiamo visto valere 4/3. Un'antiderivata di questa funzione è $G\colon x \to x - x^3/3$ (la derivata, rispetto ad x, di x è 1 e di $x^3/3$ è $3\cdot x^2/3 = x^2$); $G(1) - G(-1) = 1 - 1/3 - (-1+1/3) = 2 - 2/3 = 1 + 1/3 = 4/3$. OK!

$\boxed{5}$ Usa la formula fondamentale del calcolo integrale per controllare gli esiti dei quesiti 2 e 3.

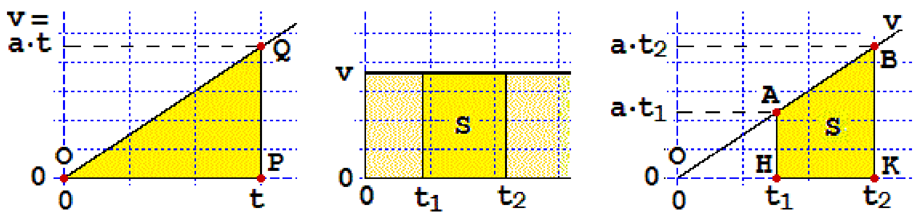
*Possiamo ora osservare come i due problemi illustrati nel ➔ **§0** sono collegati.*

$\boxed{6}$ Rileggete §0 e spiegate questa osservazione ...

3. Alcuni esempi

Accenniamo a due esempi tipici di impiego della integrazione definita, che si affiancano a quello del calcolo delle aree.

Il primo si riferisce alla ***fisica***. Consideriamo un problema simile a quello discusso all'inizio di ➔ §2. Un oggetto si muove con velocità **v** che cresce linearmente col tempo **t**, ossia con accelerazione costante **a** (se **a** = dv/dt è costante, **v** = **a**·**t**). Ecco, sotto, a sinistra, il grafico di **v** in funzione di **t**.



Se la velocità fosse costante avremmo il grafico al centro, con **v** = **s**/Δ**t**, dove **s** è lo spazio percorso, e questo sarebbe uguale a **v**·Δ**t**, ossia all'area del rettangolo raffigurato (con Δ**t** abbiamo indicato $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$).

Se **v** varia **s** è pari all'area di forma diversa che viene descritta dal segmento verticale che congiunge l'asse x ed il grafico di **v** con ascissa che varia da $\mathbf{t}_1$ a $\mathbf{t}_2$, ossia a $\int_{[t_1,\,t_2]} \mathbf{v}$.

Il secondo esempio si riferisce al ***calcolo delle probabilità***. Se hai già affrontato lo studio delle variabili casuali continue puoi approfondire l'argomento. Altrimenti ti limiti a leggere i seguenti commenti, su cui potrai tornare sopra in un secondo momento.

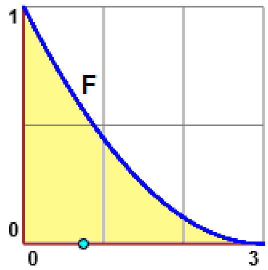
Per brevità facciamo i calcoli con **IntegrPol**. Viene descritta una funzione **F**; viene verificato che, nell'intervallo [0,3], è una funzione di densità, ossia che l'area sottesa al suo grafico per le ascisse comprese tra 0 e 3 vale 1; ne viene tracciato il grafico; viene calcolata la sua media, ossia l'integrale della funzione **G** sotto definita; viene infine tracciata la retta verticale avente per ascissa il valor medio.

```
F(x) = (x/3-1)^2 = x^2/9 - x*2/3 + 1
```

Metto in **IntegrPol** 0.11111111111111111111, −0.66666666666666666666, 1 ottenendo 0.999…, ossia 1, a conferma che è l'area sottesa vale 1.

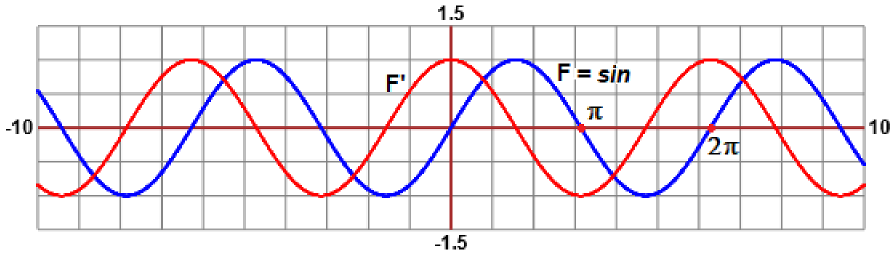
```
G(x) = x·F(x)
```

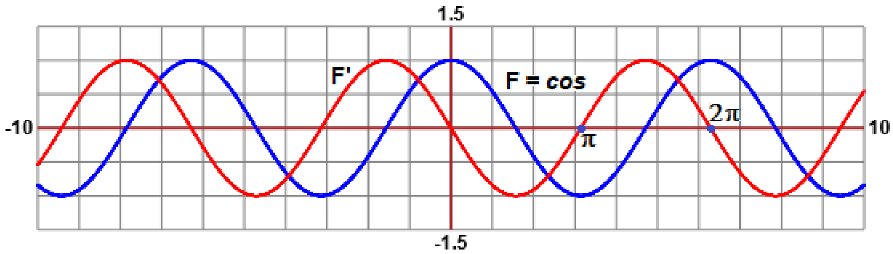
Metto in **IntegrPol** 0.11111111111111111111, −0.66666666666666666666, 1, 0 ottenendo 0.75.
Questo è il valor medio, rapprsentato dal pallino celeste.



4. Approfondimenti

Se hai già affrontato lo studio della derivazione delle funzioni ***sin*** e ***cos*** (nel §6 della ➡ scheda di avvio alla **derivazione**) puoi anche studiare come determinarne le antiderivate. Infatti abbiamo visto che **D(sin) = cos** e che **D(cos) = −sin**, come puoi facilmente ricordare pensando ai loro grafici:

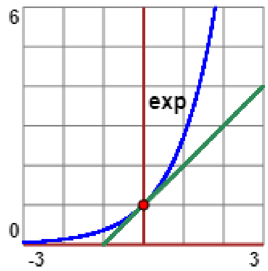




7 Qual è l'antiderivata di **cos**? Quanto vale $\int_{[0,\pi/2]}$ **cos**? Qual è l'antiderivata di **sin**? Quanto vale $\int_{[0,\pi/2]}$ **sin**?

Se hai già affrontato lo studio della derivazione della funzione esponenziale (nel §8 della ➡ scheda di avvio alla **derivazione**) puoi anche studiare come determinarne le antiderivate. Infatti abbiamo visto che **D(exp) = exp**.

8 Qual è l'antiderivata di **exp**? Stima dal grafico quanto vale $\int_{[0,1]}$ **exp**. Calcola quanto vale $\int_{[0,1]}$ **exp**. Calcola quanto vale $\int_{[-1,0]}$ **exp**. Calcola quanto vale $\int_{[-1,1]}$ **exp**.



Facciamo, infine, qualche ***richiamo storico***.

Le origini del concetto di ***integrazione*** sono molto antiche. Vari metodi per il calcolo esatto di aree di particolari figure a contorno curvilineo basati sulla loro approssimazione mediante figure poligonali erano già note alcuni secoli a.C. (Eudosso, Archimede, …). Furono poi estese ad altre figure, grazie ad una prima introduzione delle coordinate, da Oresme, intorno al 1350 e, successivamente, da altri studiosi, tra cui Galileo, Torricelli e Cavalieri (sono tutte persone che, come abbiamo già ricordato, non erano dei matematici di professione, ma si occupavano di filosofia, tecnica, economia, scienze, arte, …: la matematica come disciplina autonoma risale al XIX secolo).

L'idea del concetto di ***derivazione*** risale invece a Galileo Galilei, che mise a punto, attorno al 1600, le leggi matematiche che descrivono il movimento di un oggetto in caduta libera e il legame tra accelerazione, velocità e posizione dell'oggetto in funzione del tempo trascorso. La formalizzazione del concetto di derivata, e la scoperta della *formula fondamentale del calcolo,* sono dovute, intorno al 1670, più o meno contemporaneamente, a Newton e Leibniz.

L'area della matematica che si occupa dello studio delle proprietà e delle applicazioni del concetto di derivata si chiama ***calcolo differenziale***. L'area più generale che si occupa delle funzioni, del concetto di limite e degli altri concetti ad esso collegati (oltre alle derivate, i metodi per calcolare lunghezze, aree e volumi di figure definite mediante funzioni od equazioni, le proprietà delle funzioni continue, …) viene chiamata ***analisi matematica***. Spesso l'aggettivo ***analitico***, in matematica, viene usato per indicare metodi in cui un oggetto o una proprietà viene studiata usando tecniche di analisi matematica. In particolare lo studio delle figure mediante il ricorso alle funzioni od equazioni che le hanno per grafici viene a volte chiamato ***geometria analitica*** (è una terminologia introdotta nei primi anni del XIX secolo per distinguerla dall'approccio alla geometria allora più diffuso, in cui lo studio delle figure era basato su metodi, più direttamente legati alla immediata intuizione fisica, che non ricorrevano ai numeri reali e alle funzioni).

5. Esercizi

e1 Quanto vale l'integrale di **floor** tra 0 e 5? E quello tra -2 e 5?

e2 Sia F la funzione così definita: F(x) = x. Quali sono tutte le antiderivate di F?

e3 Sia G la funzione così definita: $G(x) = x+2$. Quali sono tutte le antiderivate di G?

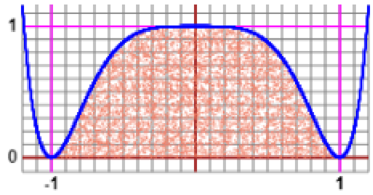
e4 Trova l'antiderivata più semplice per le seguenti funzioni, che ad x associano:
$2x$, kx, x^2, $2x^2$, kx^2, $5x+1$, $3x^2-2x+2$

e5 Se hai studiato la parte di §4 relativa alle funzioni circolari, calcola l'antiderivata rispetto ad x di:
$\cos(x)+1$, $\cos(3x)$, $x^2+\cos(2x)$, $3\sin(x)$, $3\cdot\sin(3x)$

e6 Se hai studiato la parte di §4 relativa alla funzione esponenziale, calcola l'antiderivata rispetto ad x di:
$5e^x$, e^{3x}, $x^3+4e^{x/5}$

e7 Calcola (e fai uno schizzo del grafico per valutare la ragionevolezza del risultato):
$\int_0^1 2x\,dx$, $\int_1^2 2x\,dx$, $\int_{-1}^1 2x\,dx$, $\int_{-2}^2 2x\,dx$, $\int_0^1 3x\,dx$, $\int_{-5}^5 3x\,dx$,
$\int_0^2 x^2\,dx$, $\int_{-2}^2 x^2\,dx$, $\int_0^2 x^3\,dx$, $\int_{-2}^2 x^3\,dx$, $\int_0^2 2x^2-3x+1\,dx$

e8 Sia F la funzione così definita: $F(x) = (x^4-1)^2$.
Calcola, usando **IntegrPol**, arrotondato almeno a 7 cifre, l'integrale di F tra -1 ed 1, ossia l'area della figura rossa a fianco, in cui in blu è tracciato il grafico di F (ci aspettiamo che il suo valore sia compreso tra 1 e 2).



e9 Se hai studiato la parte di §4 relativa alle funzioni circolari, calcola (e fai uno schizzo del grafico per valutare la ragionevolezza del risultato):
$\int_0^\pi \sin(x)\,dx$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\,dx$, $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$,
$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2x)\,dx$, $\int_0^{\pi/3} \sin(3x)\,dx$, $\int_0^{\pi/5} \sin(5x)\,dx$, $\int_0^\pi \sin(x)+\cos(x)\,dx$

e10 Se hai studiato la parte di §4 relativa alla funzione esponenziale, calcola (e fai uno schizzo del grafico per valutare la ragionevolezza del risultato):
$\int_0^1 e^x\,dx$, $\int_0^2 e^x\,dx$, $\int_0^2 e^x+1\,dx$, $\int_0^2 e^{x+1}\,dx$

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
area orientata (§1), *integrale di una funzione* (§1), *formula fondamentale del calcolo integrale* (§2)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol