Infiniti e infinitesimi

1. Richiami

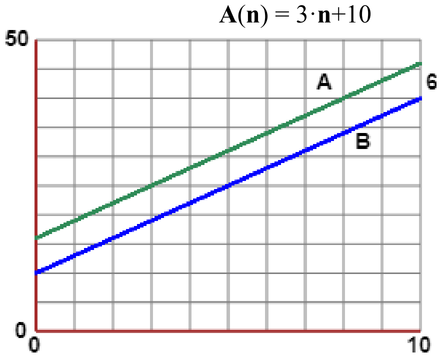
Abbiamo visto nella scheda sul concetto di limite funzioni che, al tendere dell'input ad un numero particolare o all'infinito o a meno infinito, tendono a stabilizzarsi su un certo valore o crescono o decrescono oltre ogni limite. Abbiamo visto che vi sono funzioni che tendono a questo comportamento più velocemente di altre. Nella scheda sulle funzioni esponenziale e logaritmo abbiamo incontrato due funzioni con andamento opposto, che al tendere dell'input agli estremi del dominio crescono molto velocemente o molto lentamente. In questa scheda metteremo a punto degli strumenti che ci consentiranno di precisare questi confronti, e che ci saranno particolarmente utili, sia per determinare il limite delle varie funzioni, sia per molti altri aspetti, che approfondiremo in schede successive. Uno di questi è la possibilità di approssimare molte funzioni con opportuni polinomi; qui illustriamo questa possibilità solo nel caso di alcune funzioni, attorno a particolari punti.

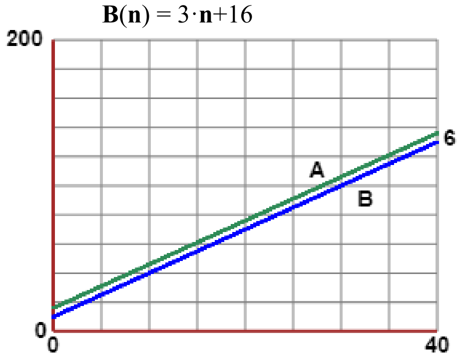
2. Confronto tra infiniti: esempi

(1) Due cineclub, **Ca** e **Cb**, presentano le seguenti tariffe: il primo 10 € di tessera annuale più 3 € a spettacolo; il secondo 16 € di tessera annuale più 3 € a spettacolo. I film proiettati sono delle stesso livello, ma il secondo cineclub ha una sala più accogliente (poltrone più comode, suono migliore, …). Quanto mi verrebbe a costare in più il cineclub **Cb**?

Studio in generale la situazione rappresentando il costo totale annuo con dei grafici. Siano **A**(**n**) e **B**(**n**) i *costi annuali* per, rispettivamente, **Ca** e **Cb** se vi vedo **n** film. Ho (facendo variare nel grafico per semplicità **n** tra i numeri reali):

A(**n**) = 3·**n**+10 **B**(**n**) = 3·**n**+16





Al crescere del numero di film visti, i costi totali **tendono entrambi all'infinito**, mantenendo una differenza costante di 6 €. Ma la distanza tra i due grafici tende ad essere **trascurabile** rispetto al valore delle ordinate: se vedo molti spettacoli non c'è praticamente differenza tra quanto spenderei complessivamente nei due cineclub.

Il fatto che A(n) e B(n) tendono ad essere "praticamente" uguali possiamo esprimerlo dicendo che il rapporto tra essi, **B**(**n**)/**A**(**n**) tende ad 1: B(5)/A(5) = (3·5+16)/(3·5+10) = 31/25 = 1.24, B(10)/A(10) = (3·10+16)/(3·10+10) = 46/40 = 1.15, B(40)/A(40) = (3·40+16)/(3·40+10) = 136/130 = 1.0461…

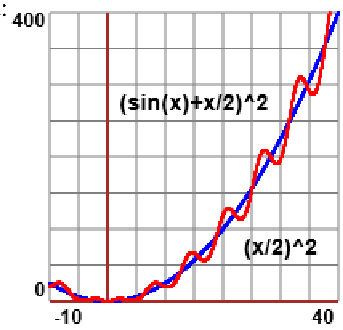
Per descrivere quanto messo ora in luce si usa dire che, al crescere di **n**, **A**(**n**) e **B**(**n**) sono *asintoticamente uguali* (o *equivalenti*); in simboli: **A**(**n**) **≈** **B**(**n**) per **n** → ∞.

Posso precisare questo modo di dire usando il concetto di **limite** per "definire" *F(x) e G(x) (che **tendano a** ∞ per x → α)* ***asintoticamente** uguali per x → α* quando:

$$\lim_{x \to \alpha} F(x) / G(x) = 1$$

Nel nostro caso, per n → ∞: $\dfrac{A(n)}{B(n)} = \dfrac{3n+10}{3n+16} = \dfrac{3+10/n}{3+16/n} \to \dfrac{3+0}{3+0} = 1$

Nota. Nel caso del nostro esempio iniziale, ovviamente, nella realtà non ha senso far tendere a ∞ il numero **n** degli spettacoli visti in un anno. Al massimo **n** potrà valere qualche centinaio, se il cineclub è aperto tutti i giorni. Tuttavia è comodo *astrarre* dalla situazione e *far finta* che ciò possa accadere: pensando ai termini A(n) = 3n + 10 e B(n) = 3n + 16 e al loro comportamento per n → ∞ è più facile ragionare che facendo i calcoli caso per caso. Abbiamo già osservato in molte altre occasioni il fatto che il passaggio al modello matematico astratto (se fatto non a sproposito) serve non per complicarsi la vita ma per rendere più semplice l'esame della situazione.



(2) Se traccio il grafico di F: $x \to (\sin(x) + x/2)^2$ ottengo una rappresentazione come quella qui a destra: una curva che oscilla con apparente andamento parabolico.

Provo a confrontare, per $x \to \infty$, F(x) con x^2:

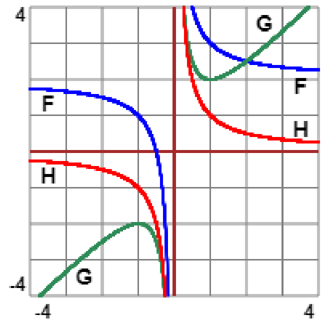
$$\frac{F(x)}{x^2} = \frac{(\sin(x) + x/2)^2}{x^2} = \left(\frac{\sin(x) + x/2}{x}\right)^2$$

$$\text{per } x \to \infty \quad \frac{\sin(x) + x/2}{x} = \frac{\sin(x)}{x} + 1/2 \;\to\; 0 + 1/2 = 1/2$$

[per $x\to\infty$ $\sin(x)/x \to 0$ in quanto è compreso tra $1/x$ e $-1/x$ entrambi i quali tendono a 0, e *il passaggio al limite conserva* la relazione "≤"]

Dunque: per $x \to \infty$ $F(x)/x^2 \to (1/2)^2 = 1/4$, e quindi $F(x)/(x^2/4) \to 1$.

Posso concludere che, per $\mathbf{x \to \infty}$, $\mathbf{F(x) \approx x^2/4}$.

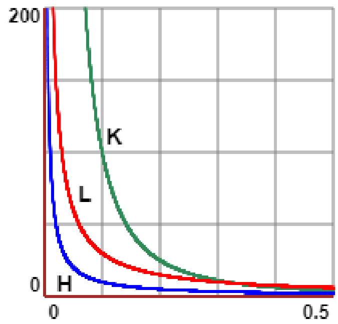


(3) I termini F(x) = **2+1/x**, G(x) = **x+1/x** e H(x) = **1/x**, che per $x \to \infty$ hanno comportamenti molto diversi, per $x \to$ **0+** e per $x \to$ **0-** tendono tutti a ∞ e a −∞. I fattori additivi 2 in F(x) e x in G(x), man mano che x si avvina a 0 e 1/x cresce, diventano trascurabili rispetto al valore complessivo. Si può dedurre che sia F(x) che G(x) tendono a comportarsi come se avessero solo il fattore 1/x, ossia come H(x). I grafici, a destra, sembrano confermare ciò. Provo a usare la ➔ definizione, con 0 come α.

$$\text{per } x \to \mathbf{0} \quad \frac{x + 1/x}{1/x} = \frac{x^2 + 1}{1} \;\to\; \frac{0^2 + 1}{1} = 1$$

$$\text{per } x \to \mathbf{0} \quad \frac{2 + 1/x}{1/x} = \frac{2x + 1}{1} \;\to\; \frac{0 + 1}{1} = 1$$

Dunque: per $\mathbf{x \to 0}$, $\mathbf{x + 1/x \approx 2 + 1/x \approx 1/x}$.



(4) La parola *asintoticamente* richiama il termine ***asintoto*** (vedi la scheda Le figure 2) e ricorda il fatto che se $\mathbf{f}1(x) \approx \mathbf{f}2(x)$ per $x \to \alpha$ allora i grafici di **f**1 e **f**2, per l'ascissa che tende ad α, tendono a confondersi. Nell'ultimo esempio i grafici di F, G ed H avevano effettivamente tutti l'asse y come asintoto.

Si noti, tuttavia, che non è detto che se due funzioni **f**1 e **f**2 hanno grafico con uno stesso asintoto si abbia che $\mathbf{f}1(x)/\mathbf{f}2(x) \to 1$. Siano ad esempio H(x) = **1/x**, K(x) = **$1/x^2$**, L(x) = **3/x**. I loro grafici per $x \to 0+$ hanno l'asse y come asintoto ma il loro rapporto non tende a 1:

- $H(x)/K(x) = 1/x\,/\,(1/x^2) = x$ che non tende a 1, ma a 0; in altre parole, $1/x^2$ all'avvicinarsi di x a 0 cresce più velocemente di 1/x, per cui i due numeri assumono rapidamente ordini di grandezza molto diversi, non tendono ad essere uguali (pur tendendo entrambi a ∞);
- $H(x)/L(x) \to 3 \ne 1$, ovvero $H(x) \approx 3\cdot L(x)$.

$\boxed{1}$ Quanto valgono h e k nei due casi seguenti?
$\sqrt{(x^8+x)} + 7\cdot x^8 \approx h\cdot x^k$ per $x \to 0$ $\quad\sqrt{(4\cdot\cos(x)+9\cdot x^6)} \approx h\cdot x^k$ per $x \to \infty$

3. Ordini di infinito

Sostituire un termine con un altro asintoticamente equivalente è molto spesso comodo per determinare ***limiti*** del tipo "**∞/∞**". Infatti lo studio del limite di **F(x)/G(x)** non cambia se sostituisco il termine F(x) con H(x) tale che H(x)≈F(x) o sostituisco il termine G(x) con H(x) tale che H(x)≈G(x).

Esempio: $\lim_{x\to\infty} (\sin(x) + x/2)^2 / (3 + 2x^2)$

Sia $(\sin(x) + x/2)^2$ che $3 + 2x^2$ tendono a ∞, quindi siamo in un caso "∞/∞".
Abbiamo visto ➔ sopra che, per $x\to\infty$, $(\sin(x) + x/2)^2 \approx x^2/4$.
$3 + 2x^2 \approx 2x^2$. Infatti $(3+2x^2)/(2x^2) = 3/(2x^2) + 2x^2/(2x^2) = 3/(2x^2) + 1 \to 0+1 = 1$.
Quindi:
$\lim_{x\to\infty} (\sin(x) + x/2)^2 / (3 + 2x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2/4\,/\,(2x^2) = \lim_{x\to\infty} 1/4/2 = 1/8$.

È comodo ricorrere alla seguente notazione, nel caso in cui F(x) e G(x) tendano all'infinito per $x \to \alpha$. Se $\mathbf{F(x) \approx G(x)}$ (cioè se $F(x)/G(x) \to 1$) si scrive anche, convenzionalmente, **F(x) = G(x) + …** per indicare la presenza di un termine che per $x\to\alpha$ è ***trascurabile*** rispetto a G(x):

per x → α F(x) è uguale a G(x) a meno di un termine trascurabile rispetto a G(x)

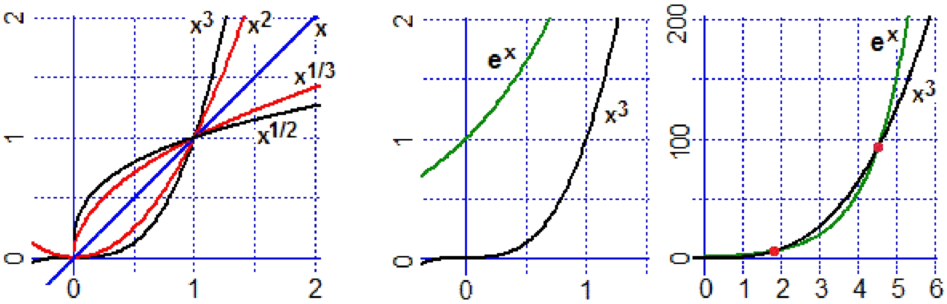
Facendo riferimento ad alcuni degli esempi visti sopra possiamo dunque scrivere:

- per $x \to \infty$, $2x + 7 = 2x +$ **…**: 7 è trascurabile rispetto a 2x.
- per $x \to 0$, $x + 1/x = 1/x +$ **…**: x è trascurabile rispetto a 1/x.
- per $x \to \infty$, $\sin(x) + x^2 = x^2 +$ **…**: sin(x) è trascurabile rispetto a x^2.

Calcoliamo velocemente $\lim_{x\to\infty} (x + 3x^2)/x^2$. Per $x \to \infty$ $x + 3x^2 \approx 3x^2$, ovvero $x + 3x^2 = 3x^2 +$ **…** Quindi:
$\lim_{x\to\infty} (x + 3x^2)/x^2 = \lim_{x\to\infty} 3x^2/x^2 = 3$.

In generale, **per** $\mathbf{x \to \infty}$ $\mathbf{x}^{\boldsymbol{h}}$ è trascurabile rispetto a $\mathbf{x}^{\boldsymbol{k}}$ se $\mathbf{0 < \boldsymbol{h} < \boldsymbol{k}}$. Vedi grafico seguente, a sinistra.

Quando F(x) è un infinito trascurabile rispetto a G(x) si dice anche che F(x) è un ***infinito di ordine inferiore rispetto a*** G(x). Quindi, per $x \to \infty$, x^2 è trascurabile rispetto a x^3.



$\boxed{2}$ Completa: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x} + x^3 + x - 130) / (3x^3 + 2) = \ldots$

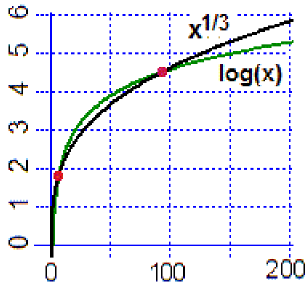
in quanto per $x\to\infty$ $\sqrt{x} + x^3 + x - 130 \approx \ldots$ e $3x^3 + 2 \approx \ldots$

Quando, per $x \to \alpha$, F(x) e G(x) tendono all'infinito e $F(x) \approx k\cdot G(x)$, ossia $F(x)/G(x) \to k$ ($\neq 0$), si dice che F(x) e G(x) sono due ***infiniti dello stesso ordine***. Abbiamo appena visto che $\sqrt{x} + x^3 + x - 130$ e $3x^3 + 2$ per $x \to \infty$ sono infiniti dello stesso ordine.

I due grafici a destra, nella figura precedente, mostrano che, per $x \to \infty$, e^x è un *infinito* che cresce molto velocemente: fino a circa $x = 1.86$ exp(x) ha valore superiore a x^3, poi ha valore inferiore fino a circa $x = 4.53$, quando definitivamente lo scavalca. Cose analoghe accadono nel confronto con x^N per qualunque N maggiore di 3.

Si può in effetti dimostrare che $x \to x^\alpha$, qualunque sia $\alpha > 0$, cresce più lentamente di *exp*. In simboli, per ogni $\boldsymbol{\alpha > 0}$:

$$\lim_{x\to\infty} e^x / x^\alpha = \infty$$



Il grafico a destra mette in luce che cosa accade per **log**, la funzione inversa di **exp**, il cui grafico è simmetrico al grafico di questa rispetto alla bisettrice del primo quadrante:

$x \to x^\alpha$, qualunque sia $\alpha > 0$, cresce più velocemente di *log*.

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) / x^\alpha = 0$$

Quanto visto per l'esponenziale e il logaritmo naturale può essere esteso, con opportune modifiche, a tutte le funzioni esponenziali e logaritmiche.

Sappiamo che $\mathbf{a^x = e^{\log(a)\cdot x}}$ e che $\mathbf{\log_a(x) = \log(x) / \log(a)}$. I grafici sono opportunamente scalati rispetto alle funzioni di base ***e*** e, se la base è minore di 1, sono ribaltati verticalmente od orizzontalmente. Non è il caso di imparare cose a memoria: basta ricondursi, con le formule precedenti, al caso di base ***e*** o di una base maggiore di 1 per studiare situazioni in cui sono coinvolte basi minori di 1.

Esempio: $\lim_{x\to\infty} (2^x + x^8 + 3) / (5^x - 7x) = \lim_{x\to\infty} (2^x + \ldots) / (5^x + \ldots) = \lim_{x\to\infty} 2^x / 5^x = \lim_{x\to\infty} 1/(5/2)^x = 1/\infty = 0$

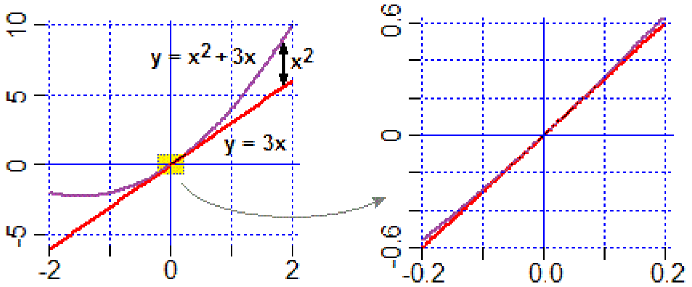
$\boxed{3}$ Calcola $\lim_{x\to\infty} (x + \log(x)) / (3x + 1)$ [usa il fatto che, per $x\to\infty$, $x+\log(x) = x+\ldots$ e $3x+1 = 3x+\ldots$]

4. Confronto tra infinitesimi: esempi

(1) Considerazioni e definizioni analoghe al caso degli "infiniti" valgono per quello degli "infinitesimi", ossia quello in cui devo confrontare F(x) e G(x) che per $x \to \alpha$ (finito o infinito) ***tendono a 0***.

Di fronte a $\lim_{x\to 0} (x^2+3x)/(2x+5x^4)$, che è del tipo "**0/0**", cerchiamo di capire come x^2+3x e $2x+5x^4$ si possono approssimare quando x è vicino a 0. I grafici che seguono mettono in luce che, per $x\to 0$, x^2+3x e 3x tendono a confondersi, ovvero in 0 hanno la stessa pendenza, ovvero y=3x è la retta tangente a x^2+3x per x=0. La cosa del resto è facimente verificabile usando la derivazione (vedi):

$$D_{x=0} (x^2+3x) = (2x+3)_{x=0} = 3, \text{ e la retta per } (0,0) \text{ con pendenza 3 è } y=3x.$$



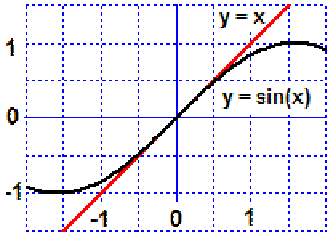
Anche in questo caso posso osservare che per $x \to 0$ $(x^2+3x)/(3x) = x/3+1 \to \mathbf{1}$ ed esprimere ciò dicendo che x^2+3x ***equivale asintoticamente*** a 3x: $x^2+3x \approx 3x$.

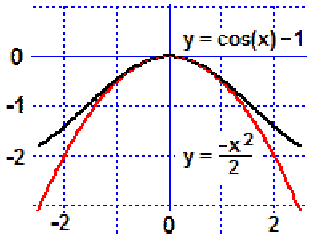
Analogamente per $x \to 0$ $(2x+5x^4)/(2x) = 1+5/2\cdot x^3 \to \mathbf{1}$, ovvero $2x+5x^4$ *equivale asintoticamente* a 2x: $2x+5x^4 \approx 2x$.

Dunque $\lim_{x\to 0} (x^2+3x)/(2x+5x^4) = \lim_{x\to 0} 3x/(2x) = \lim_{x\to 0} 3/2 = 3/2$.

(2) Sotto a sinistra sono tracciati vicino all'ascissa 0 il grafico di $x \to \mathbf{sin}(x)$ e quello di $x \to x$, che sappiamo (vedi) essere tangente al precedente.

Anche in questo caso per $x \to 0$ $\sin(x)/x \to \mathbf{1}$, ossia per $x \to 0$ $\sin(x) \approx x$.





(3) Sopra a destra è tracciato parzialmente il grafico $x \to \cos(x)-1$, che sembra avere vicino all'ascissa 0 andamento parabolico. Verifichiamo che il suo andamento è approssimabile con quello di $x \to -x^2/2$.

Si può effettivamente dimostare che per $x \to 0$ $(\cos(x)-1)/-x^2 \to 0.5$, ovvero $(\cos(x)-1)/-x^2/2 \to 1$, ovvero $\cos(x)-1 \approx -x^2/2$.

5. Ordini di infinitesimo

Così come abbiamo fatto per gli infiniti possiamo sintetizzare quanto visto negli esempi precedenti (ossia che per $x \to 0$ $3x+x^2 \approx 3x$, $\sin(x) \approx x$, $\cos(x)-1 \approx -x^2/2$) in questo modo:

(1) $3x+x^2 = \mathbf{3x} + \ldots$ **(2)** $\sin(x) = \mathbf{x} + \ldots$ **(3)** $\cos(x)-1 = \mathbf{-x^2/2} + \ldots$

espressioni che possiamo leggere come: "$3x+x^2$ è uguale a $3x$ a meno di un *infinitesimo* ***trascurabile*** rispetto a x", "sin(x) è uguale a x a meno di un infinitesimo trascurabile rispetto a x", "cos(x)− 1 è uguale a $-x^2/2$ a meno di un infinitesimo trascurabile rispetto a x^2".

Osserviamo che un *infinitesimo* è *trascurabile* rispetto ad un altro quando è di ***ordine superiore*** (x^3 è trascurabile rispetto a x^2), mentre un *infinito* è trascurabile rispetto ad un altro quando è di *ordine inferiore* (x^2 è trascurabile rispetto a x^3).

Esempio: $\lim_{x \to 0} (\sin(x) + x/2) / (2x + x^2) =$ **(*)**

Sia $\sin(x) + x/2$ che $2x+x^2$ tendono a 0, quindi sono in un caso "0/0". So che, per $x\to 0$, $\sin(x) = x+\ldots$, da cui $\sin(x)+x/2 = 3x/2+\ldots \approx 3x/2$, e che, per $x\to 0$, $2x+x^2 \approx 2x$. Quindi:

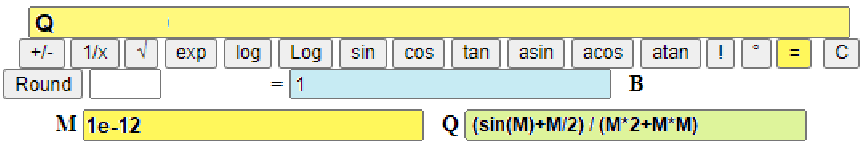
(*) $= \lim_{x \to 0} (\sin(x) + x/2) / (2x + x^2) = \lim_{x \to 0} 3x/2 / (2x) = \lim_{x \to 0} 3x/(4x) = 3/4$.

$\boxed{4}$ Calcola $\lim_{x \to \infty} (\sin(1/x)+1/x^2) / (1/x)$ [*traccia:* è del tipo "0/0"; poni u=1/x e studia il limite per $u \to 0$]

Puoi studiare i limiti precedenti con gli script **TabFun1** (con gli input 1, 0.1, 1e-2, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7) e TabFun2 (con gli input 1, 10, 1e2, 1e3, 1e4, 1e5, 1e6, 1e7).

$\boxed{5}$ Determina $\lim_{x \to 1} (\sqrt{x} - x)/(x^2-1)$ (che è del tipo "0/0"), sperimentalmente, con lo script TabFun3

Potremmo usare anche la nostra **grande CT** (**vedi**); ad es. $\lim_{x \to 0} (\sin(x) + x/2) / (2x + x^2)$:

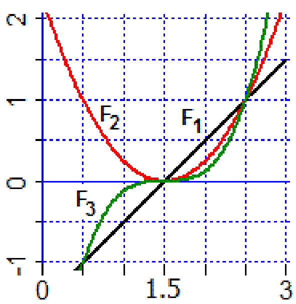


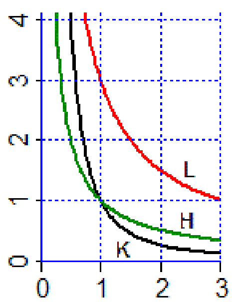

```
M = 1e-4     0.7499625010416145
M = 1e-8     0.7499999962500001
M = 1e-12    0.7499999999996251
M = 1e-16    0.75
```

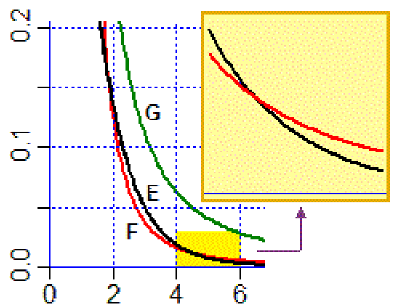
A questo punto stabiliamo alcuni *criteri per confrontare gli ordini di infinitesimo,* analoghi a quelli messi a punto per gli infiniti. Sono criteri altrettanto semplici, che è facile richiamare alla mente pensando ad alcuni esempi.

- **Per** $\mathbf{x \to 0}$ $\mathbf{x^h}$ **è trascurabile rispetto a** $\mathbf{(x^k)}$ **se** $\mathbf{h > k > 0}$: x^α va a zero tanto più velocemente quanto maggiore è α.

Analogamente per $\mathbf{x \to q}$ $\mathbf{(x-q)^h}$ è trascurabile rispetto a $(x-q)^k$ se $h > k > 0$. Ad esempio sotto a sinistra sono rappresentate F1: $x \to x-1.5$, F2: $x \to (x-1.5)^2$ e F3: $x \to (x-1.5)^3$. Evidentemente F3 è quella che per $x \to 1.5$ tende a 0 più velocemente.







- Per $x \to \infty$ $1/x^h$, posto u=1/x, si comporta come u^h per $u \to 0$. Quindi:

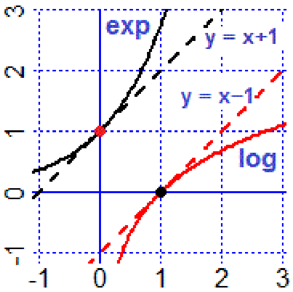
per $\mathbf{x \to \infty}$ $\mathbf{1/x^h}$ **è trascurabile rispetto a** $\mathbf{1/x^k}$ **se** $\mathbf{h > k > 0}$: $1/x^\alpha$ va a zero tanto più velocemente quanto maggiore è α.

Nel grafico soprastante al centro sono rappresentate (in una scala diversa) le stesse funzioni H(x) = **1/x**, K(x) = $\mathbf{1/x^2}$, L(x) = **3/x** considerate sopra studiando ➡ gli infiniti. Là K aveva il grafico che (avvicinandosi l'input a 0 da destra) saliva più rapidamente, qui ha quello che (al crescere dell'input) si avvicina all'asse x più rapidamente.

• Sopra a destra sono considerate le funzioni E(x) = **exp(−x)**, F(x) = **$1/x^3$**, G(x) = **$1/x^2$**. Come si vede meglio nell'ingrandimento, la funzione esponenziale negativa, E, si avvicina più velocemente delle altre all'asse x, nonostante che per un certo tratto sia scavalcata dalla funzione F.

In generale, se **a** > 1, **a^x** per **x** → −∞, ovvero **a^{-x}** per **x** → ∞, è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $1/x^\alpha$, comunque si prenda α positivo.

$\boxed{6}$ Determina $\lim_{x \to \infty} 5^{-x} \cdot x^6$ (motiva la risposta e controllala con TabFun4).



Il fatto che il grafico di **exp** abbia in (0,1) come tangente y = x+1 ci assicura che per **x → 0** **$e^x \approx x+1$** ovvero **$e^x - 1 \approx x$.**

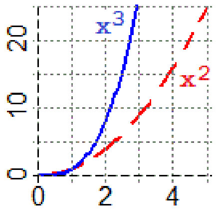
Per simmetria, y = x−1 è la tangente al grafico di **log** in (1,0) e, per **x → 1, log(x) ≈ x − 1** ovvero **log(x) ≈ x − 1**

Esempio: $\lim_{x \to 1} \log(x)/(x^2-1) = \lim_{x \to 1} (x-1+\ldots)/((x-1)(x+1)) = \lim_{x \to 1} (x-1)/((x-1)(x+1)) = \lim_{x \to 1} 1/(x+1) = 1/2$.

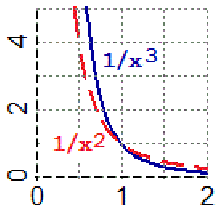
Possiamo controllare la risposta con TabFun5.

6. Specchietto riassuntivo

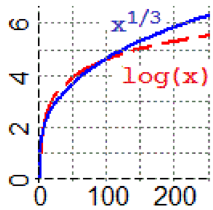
Riassumiamo qui alcune relazioni particolarmente utili, e ne introduciamo alcune nuove.



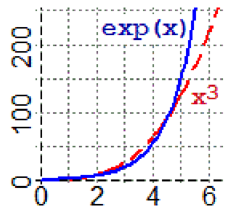
x → ∞



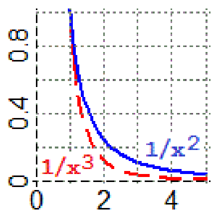
0 ← x



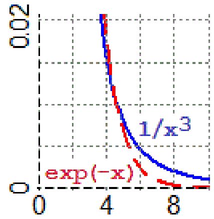
x → ∞



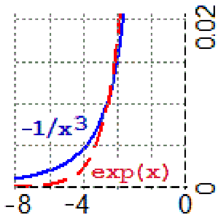
x → ∞



x → ∞



x → ∞



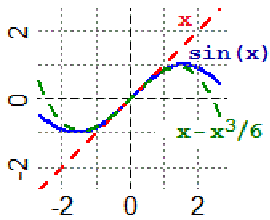
−∞ ← x

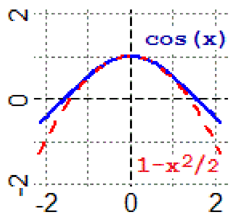
In **rosso**
gli **infiniti** ↑ o
← gli **infinitesimi**
trascurabili
(ossia gli infiniti di ordine inferiore,
gli infinitesimi di ord. superiore)

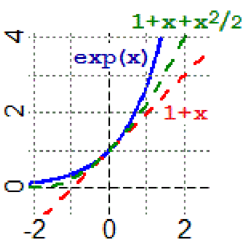
Per **x → 0**

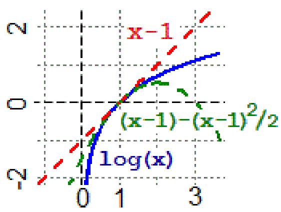
sin(x) ≈ x ovvero:
sin(x) ≈ $x - x^3/6$

cos(x) ≈ $1 - x^2/2$









Per **x → 0**
exp(x) ≈ 1 + x ovvero:
exp(x) ≈ $1 + x + x^2/2$
Per **x → 1**
log(x) ≈ x − 1 ovvero:
log(x) ≈ $x-1-(x-1)^2/2$

Ricordiamo che, fatta un po' di pratica con la manipolazione matematica, puoi ricorrere a del software di uso pubblico per svolgere i calcoli (analizzando comunque criticamente i risultati che ti vengono proposti e controllandone la sensatezza), **www.WolframAlpha.com**: vedi. Apri il software e copia nella finestra di input via via i seguenti "oggetti" e osserva, via via, la risposta ottenuta:

```
lim e^x/x^a as x->oo, a>0      lim log(x)/x^a as x->oo, a>0      lim (sqrt(x)-x)/(x*x-1) as x -> 1
     lim sqrt(n^2+n)-sqrt(n^2-2) as n -> oo              lim n*log(n)/(n^4)^(1/3) as n -> oo
```

7. Esercizi

$\boxed{e1}$ Siano F1: x → cos(x)·√x+x, F2: x → √(x^2+x), F3: x → √x·(cos(x)+x). Stabilisci, nel modo che ritieni più opportuno, quali tra F1(x), F2(x) ed F3(x) si può dire che, per x → ∞, sono infiniti dello stesso ordine.

$\boxed{e2}$ Sperimentare numericamente e congetturare il limite per $n \to \infty$ delle tre successioni a lato, e provare le congetture.

$\sqrt{(n^2+n)}-\sqrt{(n^2-n)}$ $\sqrt{(n^2+n)}-\sqrt{(n^2-2)}$ $\sqrt{(n^2+3)}-\sqrt{(n^2-4)}$

e3 Determina il limite per $x \to 0$ di:
$x/(\cos(x)-1)$ $x^2/(\cos(x)-1)$ $x^3/(\cos(x)-1)$

e4 Stabilisci se **z** deve essere 0+ o 0− perché si possa studiare l'esistenza di $\lim_{x \to z} \sqrt{(\sin(x)-\tan(x))}$.
Poni $F(x) = \sqrt{(\sin(x)-\tan(x))}$ o $F(x) = \sqrt{(\tan(x)-\sin(x))}$ in modo che il limite precedente sia eguale a $\lim_{x \to 0+} F(x)$.
Determina, quindi, tale limite e, posto $G(x) = 1/F(x)$, dimostra che $\lim_{x \to 0+} G(x) = \infty$.

Congettura per quale α $G(x)$ tende all'infinito per $x \to 0+$ come $1/x^\alpha$.

e5 Confrontare per $x \to \infty$ i seguenti infiniti:
$\sqrt[3]{(x+1/x)}$ $\arctan(x) \cdot x^2$ $\sqrt{x} \cdot (1+x)$

e6 So che $\mathbf{d\,a^x/dx} = \log(a) \cdot a^x$ (vedi la scheda sulle funzioni esponenziale e logaritmo).
Quindi in x=0 la tangente a $y=a^x$ è $y=\log(a) \cdot x+1$ e per $x \to 0$ $a^x \approx \log(a) \cdot x+1$.
Usa ciò per determinare $\lim_{x \to 0} (10^x - e^x)/\sin(x)$ (verifica la risposta con TabFun6, tenendo conto del valore di log(10), calcolabile con la grande CT).

e7 Stabilire se esistono (ed eventualmente calcolare) i limiti (per $n \to \infty$) delle seguenti successioni:
$n!/2^n$ $n!/(2n)!$ $2^n/3^n$ $n^n/n!$ $(\sqrt{(n+1)}-\sqrt{(n-1)})\sqrt{n}$ $n \cdot \log(n)/\sqrt[3]{n^4}$

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
asintoticamente uguali (§2), ***o** piccola* (§3), *infinito di ordine inferiore* (§3), *infiniti dello stesso ordine* (§3), *equivalenza asintotica* (§4), ***o** piccola* (§5), *infinitesimo di ordine superiore* (§5).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol Istogramma RandomNum IntGauss AB3dim TabFun ALTRO