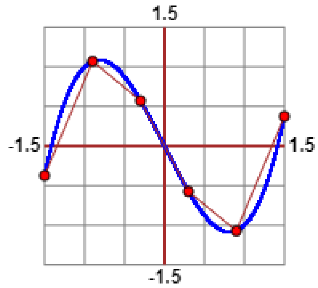
Complementi di Geometria

1. Introduzione

In questa scheda svilupperemo alcuni aspetti degli argomenti di geometria affrontati finora. Alcune parti saranno indicate come "approfondimenti", per segnalare che sono affrontabili solo in alcune scuole o alcune classi.

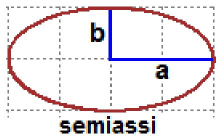
2. Lunghezza di curve

Abbiamo visto come calcolare col computer la lunghezza di una curva. Ad esempio nel caso del grafico della funzione F: $x \to x^3-2x$ si può trovare che la sua lunghezza tra il punto di ascissa −1.5 e quello di ascissa 1.5, arrotondata, è 6.179914900651: se approssimo la curva con una poligonale costituita da 5 segmenti (con ascisse equidistanziate) ottengo 5.984139710790, se l'approssimo con una poligonale di 10 segmenti ottengo 6.112638676119, se l'approssimo con una di 100 ottengo 6.1792252221584, ...



Con un semplice *programmino* (**[vedi](#)**) posso calcolare facilmente la lunghezza con più precisione, ottenendo il valore 6.1799149007

$\boxed{1}$ Con lo stesso programma calcola la lunghezza dell'ellisse di semiassi 2 e 1 [scegli 2*Math.cos(t) come x(t) e Math.sin(t) come y(t); prendi 0 come **a** e 2*Math.PI come **b**]. Arrotondando a 12 cifre dovresti ottenere 9.6 ... 55. Quanto ottieni? Controlla l'esito con *WolframAlpha* [usa il comando `arc length of ( 2*cos(t),sin(t) ) from t=0 to 2*pi`].

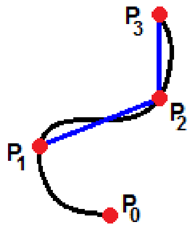


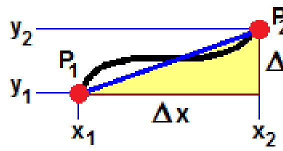
Abbiamo visto che non è detto che questo algoritmo converga: vi sono curve che hanno un punto di partenza ed uno di arrivo ma che sono di lunghezza infinita.

Si può calcolare la lunghezza con un procedimento non sperimentale? In alcuni casi sì. Qui sotto è spiegato come farlo in un caso particolare.

Approfondimenti.
Siano **f e g** derivabili in [a, b], nel senso che ne esistano la derivata in (a, b) e le derivate sinistra e destra in a e in b. Suddivido [a, b] in n sottointervalli di eguale ampiezza $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, …, $[t_{n-1}, t_n]$ dove $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Siano x_i e y_i le coordinate dei punti corrispondenti. La poligonale che ne risulta approssima il nostro arco di curva. Ecco una traccia di come ottenere una formula per il calcolo della lunghezza dell'arco:

$$x = f(t),\quad y = g(t)$$
$$\Delta x \approx f'(t)\cdot\Delta t,\quad \Delta y \approx g'(t)\cdot\Delta t$$
$$\sum\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)} \approx \sum\sqrt{(\,(f'(t)\cdot\Delta t)^2 + (g'(t)\cdot\Delta t)^2\,)}$$
$$= \sum\sqrt{(\,f'(t)^2 + g'(t)^2\,)}\cdot\Delta t \;\to$$
$$\int_{[a,\,b]} \sqrt{(\,\mathbf{f'(t)^2 + g'(x)^2}\,)}\ \mathbf{dt}$$





Calcoliamo in questo modo, per esempio, la lunghezza del cerchio unitario, x = cos(t), y = sin(t), t in [0,2π]:
$D_t\sin(t) = \cos(t)$, $D_t\cos(t) = -\sin(t)$, $\int_{[0,2\pi]}\sqrt{(\sin(t)^2+\cos(t)^2)}\,dt = \int_{[0,2\pi]} 1\,dt = [t]_{t=2\pi} - [t]_{t=0} = 2\pi$

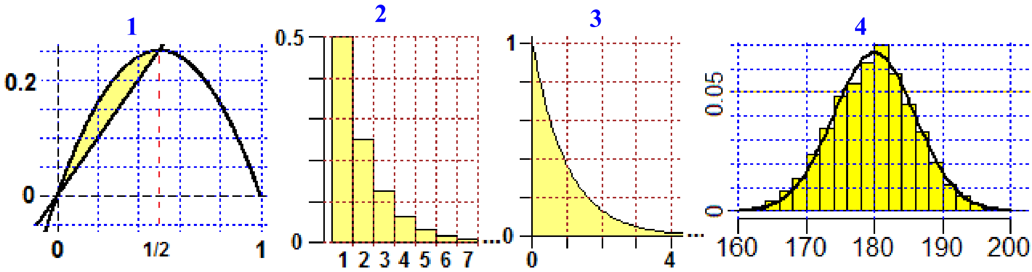
La lunghezza di un ***arco di sfera***, e in particolare la distanza tra due punti sulla sfera terrestre, note le loro latitudini e longitudini, possono essere calcolati con lo [script](#) "**dist ortodromica**".

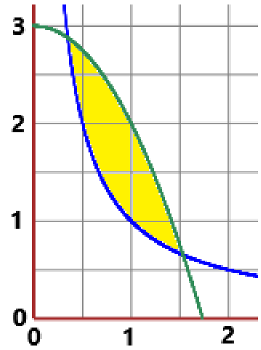
3. Area di superfici

Abbiamo visto come calcolare l'area di un poligono. Abbiamo poi visto come con gli integrali si può calcolare l'area di altre figure. In **fig. 1** è rappresentata la superficie racchiusa tra i grafici di F: $x \to -x^2+x$ e di G: $x \to x/2$. Essi si intersecano quando $-x^2+x = x/2$, ossia quando $-x^2+x/2 = 0$, ossia quando $x(x-1/2)=0$, ossia quando x=0 e quando x=1/2. Quindi l'area è $\int_{[0,1/2]} -x^2+x/2\,dx = k(1/2)-k(0)$ dove $k(x) = -x^3/3+x^2/4$, ossia 1/16−1/24 = 1/48 = 0.0208333…

Abbiamo visto anche figure senza area e figure illimitate di area finita. Queste ultime le abbiamo viste soprattutto per rappresentare leggi di distribuzione. Sotto, in **fig. 2**, è rappresentato parzialmente l'istogramma di distribuzione normalizzato (ossia scalato verticalmente in modo che l'**area sia 1**) del numero di lanci da effettuare affinchè esca testa (al 50% esce al primo lancio, al 25% al secondo, al 12.5% al terzo, …). Vedi "[Quale matematica per i fenomeni casuali](#)".

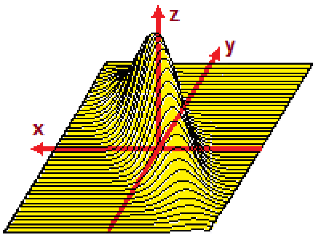
In **fig. 3** è riprodotta una funzione di densità della distribuzione esponenziale, definita in [0,∞); in **fig. 4** una distribuzione gaussiana, definita in (−∞,∞).





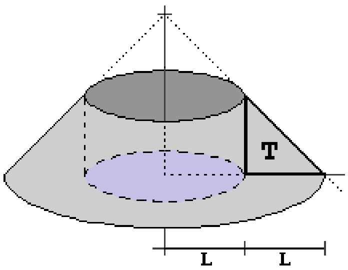
2 L'area tra curve spesso coinvolge calcoli non facili da svolgere a mano. Prova a determinare l'area della superficie che sta nel primo quadrante ed è racchiusa tra le curve $y = 1/x$ e $y = -x^2+3$. Procedi con *WolframAlpha* così:
• usando "solve ... for x" trova, con una quindicina di cifre, le ascisse dei punti di intersezione tra le due curve;
• con "area between y=... and y=... from x=... to ..." calcola l'area cercata e arrotondala a 12 cifre. [dovresti ottenere 0.885376158860]

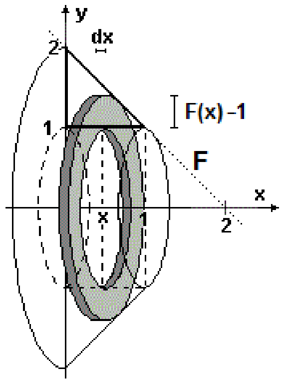
Questo calcolo lo possiamo fare facilmente anche con un programma in JavaScript: vedi.

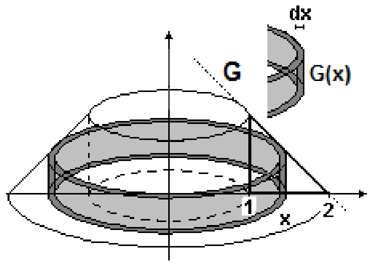


4. Volumi di solidi

Sappiamo determinare i volumi di parallelepipedi, cilindri, piramidi e coni. Come abbiamo osservato che vi sono figure piane illimitate di area finita, così abbiamo visto che vi sono solidi illimitati che hanno un volume finito (vedi la figura a lato). Occupiamoci, ora, di come determinare i volumi di alcune altre figure solide, quelle che possono essere generate mediante la ***rotazione attorno ad un asse*** di una figura piana. Illustriamo le "tecniche" impiegabili partendo da un caso in cui sappiamo determinare il volume anche con altri metodi.







Determino il volume del solido raffigurato sopra a sinistra, dotato di un asse di simmetria, con la superficie "interna" cilindrica di raggio uguale all'altezza, una faccia a forma di corona circolare e il resto della superficie a profilo rettilineo, inclinato di 45° rispetto all'asse di simmetria (i semipiani aventi come bordo l'asse di simmetria intercettano sul solido dei triangoli rettangoli isosceli). L (la lunghezza dei cateti del triangolo T) è sia lo spessore della corona circolare che l'altezza e il raggio del cilindro. Suppongo che L = 1, ossia uso L^3 come unità di volume. Posso pensare il solido come un cono circolare retto di altezza e raggio 2 da cui ho tolto un cono di altezza e raggio 1 e un cilindro circolare retto di altezza e raggio 1.

Ottengo: $4\pi 2/3 - \pi/3 - \pi = 4\pi/3$ (ossia $4\pi/3L^3$).

Ora ricavo il volume usando direttamente qualche tecnica di integrazione. Dovrei ottenere lo stesso risultato. Penso il solido come frutto della rotazione di una figura attorno all'asse di simmetria.

Nel mio caso posso pensare il profilo della figura
- sia come grafico di una funzione F assumendo l'asse di rotazione come asse x,
- sia come quello di una funzione G assumendo l'asse di di rotazione come asse y.

• Col primo metodo *(figura al centro)* penso il solido come somma di tanti anelli (***rondelle***) di spessore Δx, raggio esterno F(x) e interno 1.

La variazione ΔV del volume al passare da x a $x+\Delta x$ è approssimabile con $\pi(F(x)^2 - 1)$ (area della corona circolare base dell'anello) per Δx: $dV = \pi(F(x)^2 - 1)\, dx$. $F(x) = 2-x$. Dato che x varia in $I = [0,1]$, il volume è $V = \int_I \pi(3+x^2-4x)\, dx = \pi(3x+x^3/3-2x^2)_{x=1} = \pi(3+1/3-2) = 4\pi/3$.

• Col secondo metodo *(figura a destra)* penso il solido come somma di cilindretti cavi (***gusci cilindrici***) di spessore Δx, raggio interno x e altezza F(x).

La variazione ΔV del volume al passare da x a $x+\Delta x$ è approssimabile con $G(x)\Delta x$ (area del rettangolino dalla cui rotazione ottengo il cilindretto cavo) per $2\pi x$ (circonferenza del cilindretto): $dV = 2\pi x\, G(x) dx$. $G(x) = 2-x$ (in questo caso particolare G(x)=F(x)). Dato che x varia in $I = [1,2]$, il volume è $V = \int_I 2\pi(2x-x^2)\, dx = 2\pi((x^2-x^3/3)_{x=2} - (x^2-x^3/3)_{x=1}) = 2\pi(3-7/3) = 4\pi/3$.

Il calcolo lo potrei fare facilmente anche con lo script "**integrali**" presente qui: $\int_{[0,1]} x^2-4x+3\, dx = 4/3$.

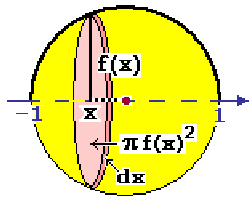
f(x) = (h*x^4 + k*x^3 + p*x^2 + q*x + u) ^ e

h 0 | k 0 | p 1 | q -4 | u 3 | e 1

a 0 | b 1

```
n = 1000000  I = 1.333333333333162
n = 100000  I = 1.3333333333250137
n = 10000  I = 1.3333333325000012
```

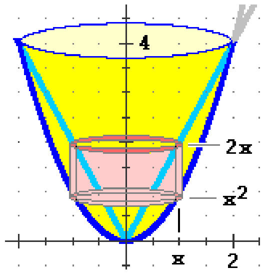
Approfondimenti.



Vediamo altri due esempi. Determino il volume di una ***sfera*** in modo alternativo rispetto a quanto già visto, illustrato qui a sinistra (pensare alla sfera come unione di piramidi con altezza pari al raggio). Posso limitarmi al caso in cui il raggio sia 1: moltiplicando per R^3 il volume così ottenuto otterrei quello di una sfera di raggio R. Penso la sfera come unione di dischi di spessore infinitesimo dx e raggio $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, di volume $\pi\, f(x)^2dx = \pi(1-x^2)dx$. Sommando il volume dei dischi ottengo:

$$\int_{[-1,\,1]} \pi\, f(x)^2\, dx = \int_{[-1,\,1]} \pi(1-x^2)dx = \pi\left([x-x^3/3]_{x=1} - [x-x^3/3]_{x=-1}\right) = 4\pi/3.$$

In pratica questo *metodo dei dischi* è un caso particolare di quello *delle rondelle*.



Vediamo, ora, come ottenere il volume del solido a fianco (una specie di bicchiere), ottenuto ruotando attorno all'asse y la regione compresa tra $y = 2x$ e $y = x^2$ per x in [0, 2]. Potrei procedere come sopra, pensando il solido affettato orizzontalmente, come composto da tante rondelle. Procedo, invece, pensandolo come composto da tanti *gusci cilindrici* di raggio x, altezza $2x-x^2$ e spessore dx. "Sommando" il volume dei cilindri ottengo:

$$\int_{[0,\,2]} 2\pi x\,(2x-x^2)\,dx = 2\pi \int_{[0,\,2]} 2x^2-x^3\,dx = 32\pi/3-8\pi = 8\pi/3.$$

Il calcolo lo potrei fare facilmente anche con lo script **"integrali"** già richiamato. Integrando −2*x³+4*x² tra 0 e 2 ottengo 2.666…

5. Definizioni e dimostrazioni. Le geometrie "non euclidee"

Che cosa è una *poesia*? Se ne cerco il significato in un vocabolario posso trovare "componimento in versi". Se, per capire, cercassi anche il significato di *verso* potrei trovare "ciascuna delle unità fondamentali di una composizione poetica". In pratica una ***definizione*** rimanda all'altra e da esse non riesco a capire che cosa sia una poesia. Per capirlo occorre aver letto poesie e aver imparato a chiamarle in quel modo.

Se provo con *bicchiere* posso trovare "piccolo recipiente usato per portare le bevande alla bocca". In questo caso, andando a cercare *recipiente*, *bevanda,* … non incontrerei di nuovo la parola *bicchiere*, ma troverei altre parole nuove, di cui a loro volta potrei andare a cercare il significato sul vocabolario. In ogni caso, prima a poi, arriverei a parole di cui il vocabolario non mi riesce a spiegare il significato: devo apprenderlo mediante qualche figura, qualche esempio o qualche esperienza di tipo fisico o sociale.
Poi, non è detto che si concordi tutti sul significato di una parola. Ad esempio di fronte a un certo componimento che qualcuno considera una "poesia" ci può essere chi non è d'accordo a considerarlo tale.

Non è raro che un processo ***dimostri*** la colpevolezza di un imputato e che, dopo qualche tempo, si venga a scoprire che il colpevole era invece un'altra persona. Oppure che due successivi processi, a partire dalle stesse "prove", diano uno una sentenza di colpevolezza e l'altro di innocenza.

In ***matematica*** *definizioni* e *dimostrazioni* vengono intese con una accezione più ristretta. Vedi la voce **Definizioni e dimostrazioni** degli *Oggetti Matematici* per qualche riflessione e precisazione a proposito delle definizioni e dimostrazioni dei matematici.

La parola ***modello*** in matematica, oltre che per indicare:
– una "rappresentazione matematica" di un fenomeno, una situazione, un oggetto, … riferito a un certo contesto,
viene usata anche, in un modo quasi opposto, per indicare
– una "interpretazione" in qualche contesto matematico di un insieme di proprietà.

Da una parte si può dire che il concetto di *relazione d'ordine* è un *modello matematico* per: il "≤" tra numeri interi o numeri reali, il "⊂" tra insiemi, l'ordinamento alfabetico tra parole, …, dall'altra si dice anche che tali insiemi (considerati rispetto a "≤", "⊂", …) sono un *modello* degli assiomi di "relazione d'ordine".

Questo nuovo significato di "modello" si è sviluppato a cavallo del XIX e XX secolo. Per il suo uso riferito alla geometria, e alle sue diverse presentazioni assiomatiche, si veda la voce ***Assiomi e loro modelli*** degli *Oggetti Matematici.*

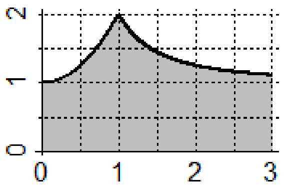
6. Esercizi

e1 Usando opportunamente *WolframAlpha* calcola la lunghezza della curva (chiamata *cicloide*) descrivibile parametricamente con `x=1-sin(t), y=t-cos(t)`, per t in [0,2π].

e2 Calcola la lunghezza della stessa curva considerata nell'esercizio precedente usando opportunamente uno script.

e3 Usando opportunamente *WolframAlpha* calcola la lunghezza della curva (chiamata *elica*) descrivibile parametricamente con `x=cos(t), y=sin(t), z=t`, per t in [0,10π].

e4 Calcola la lunghezza della stessa curva considerata nell'esercizio precedente usando opportunamente uno script.



e5 Sia F: $x \to 1+x^2$ se $x \le 1$, $1+1/x^2$ altrimenti. Calcola l'area tra il grafico di F e le rette $x=0$, $x=3$, $y=0$ (cerca di capire, prima, perché il grafico ha la forma raffigurata a lato).

e6 Quanto vale il volume del paraboloide circolare (vedi) ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della parabola $y = x^2$ con ordinata compresa tra 0 e 4?