Funzioni ed equazioni

Modelli matematici per studiare relazioni tra grandezze

Scheda **2**

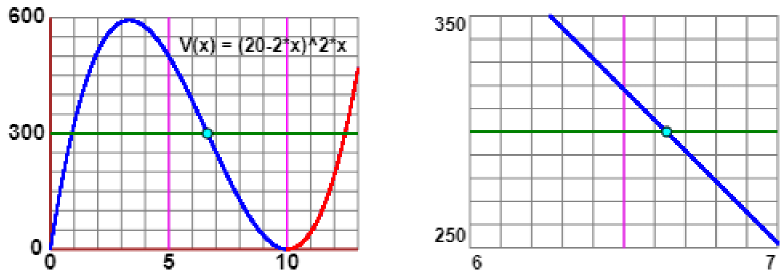
1. *Funzioni continue*
2. *Sistemi di equazioni*
3. *Sistemi lineari*
4. *Risoluzione di disequazioni - Funzioni crescenti e funzioni decrescenti*
5. *Esercizi*

→ *Sintesi*

1. Funzioni continue

Ritorniamo sul *metodo grafico* per risolvere equazioni, già discusso nella → scheda precedente. Consideriamo l'equazione $(20-2T)^2\,T = 300$, dove T è il lato in centimetri del quadrato da tagliare da un quadrato di lato 20 cm per ottenere una scatola di volume 300 cm^3.

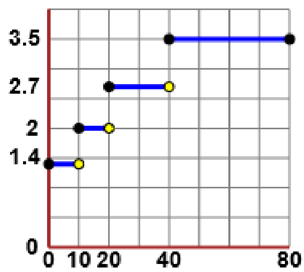
Per risolverla posso tracciare i grafici di $x \to (20-2x)^2\,x$ e di $x \to 300$ e vedere dove essi si intersecano.



- il modello matematico del "problema della scatola" include la condizione $0 < x < 10$; se lo rappresento graficamente ottengo la figura blu a sinistra;
- la soluzione maggiore si trova tra 6 e 7; con uno "zoom" traccio il grafico per $x \in [6, 7]$ e ottengo la figura centrale; vedo che la soluzione sta in [6.6, 6.7].

Potrei procedere con ulteriori zoom o posso "automatizzare" il procedimento con lo **script** **eq.polinomiale** ottenendo il valore 6.638888245840114. In ogni caso posso trovare un valore approssimato con un numero fissato di cifre. Anche se in questo caso non ci interessano soluzioni così precise, usando programmi capaci di eseguire calcoli con più cifre, oppure procedendo a mano, con molto tempo e pazienza a disposizione, potrei conoscere la soluzione con quante cifre voglio.

1 All'inizio della → scheda precedente abbiamo considerato la funzione **T** che ad ogni percorrenza compresa tra 0 e 80 km associa la tariffa in € fissata da una particolare società di trasposrti su autobus. *Ha soluzioni* l'equazione **T**(x) = 2? e **T**(x) = 3?

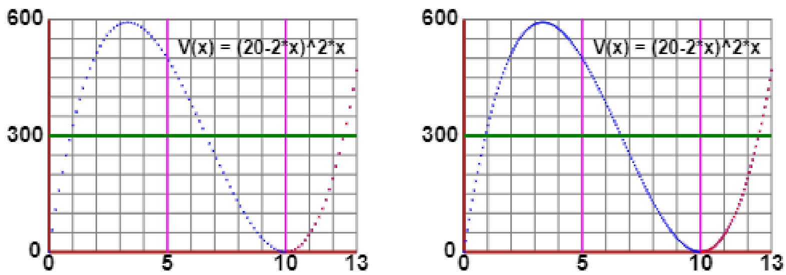


2 Come si vede dal grafico, piccole variazioni di x vicino ad 10, 20 o 40 fanno comunque variare gli output di scatto: 9.9 → 1.4, 9.99 → 1.4, 10 → 2; 39.9 → 2.7, 39.99 → 2.7, 40 → 3.5

Dunque, per questa funzione, infittendo gli input (i valori di x) non posso ottenere una tabulazione con gli output (i valori di y) fitti quanto voglio, cioè vicini l'uno al successivo quanto voglio.

Per la funzione $x \to (20-2x)^2\,x$ *posso affermare* che facendone una tabulazione con input via via sempre più fitti posso ottenere output fitti quanto voglio?

Sotto sono tracciati i grafici di **V** ottenuti con 150 e con 300 punti; si vede che non ci sono le 3 intersezioni con la retta y=300. La figura all'inizio della scheda era stata tracciata con un numero molto maggiore di punti (circa 30 mila) e si vedevano tutte e 3 le intersezioni.



Se una funzione è definita in tutto un intervallo [a, b] e all'infittire degli input in tale intervallo fornisce output man mano più fitti (ovvero se al crescere di N intero posso trovare D tale che il salto tra i valori della funzione in U e V è minore di 1/N ogni qual volta U e V distano meno di D), come la funzione iniziale in [0, 13], allora si dice che tale funzione è ***continua*** in [a, b].

Nel linguaggio comune l'aggettivo ***continuo*** si usa con vari significati. Quello più vicino alla definizione ora data è «senza interruzioni»: per dare un'idea della differenza tra il grafico della funzione inziale e quello di **T** possiamo dire infatti che, al variare di x, nel primo caso y varia in modo continuo, mentre nel secondo caso y varia presentando degli "scatti". Vedi anche quello che si è detto a proposito dei *segnali analogici*, nell'unit didattica *La automazione*, nel ➡ primo paragrafo della scheda 5.

3 Sapete individuare qualche intervallo in cui la funzione **T** del quesito 1 sia continua?

4 Considera le seguenti funzioni F1 ed F2, definite in [0, 100].
- Sono continue in [0, 100]?
- Hanno soluzioni in tale intervallo le equazioni in x $F1(x)=140$ e $F2(x)=140$?

$$F1(x) = \begin{cases} 30+2x & \text{se} \quad 0 \le x \le 50 \\ -20+3x & \text{se} \quad 50 < x \le 100 \end{cases} \qquad F2(x) = \begin{cases} 30+2x & \text{se} \quad 0 \le x \le 50 \\ 50+2x & \text{se} \quad 50 < x \le 100 \end{cases}$$

Tutte le funzioni del tipo $x \to f(x)$ con f(x) termine costituito, a partire da x e da costanti, solo applicando le "quattro operazioni", l'elevamento a potenza, la radice quadrata, le funzioni seno, coseno e tangente, sono continue in ogni intervallo [a, b] in cui siano definite.

Infatti i risultati di queste operazioni variano con continuità al variare degli input: per "piccole" variazioni degli input, i risultati hanno "piccole" variazioni. Ciò discende dal modo in cui sono stati definiti gli algoritmi di queste operazioni sui numeri decimali limitati, e dal modo in cui tali algoritmi sono stati estesi ai numeri reali. Su questi argomenti ritornerai negli anni prossimi.

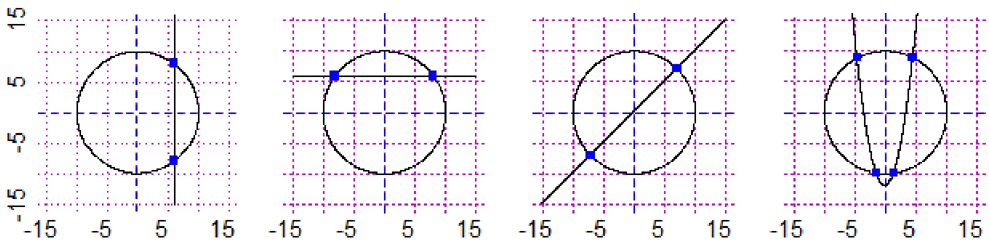
Ecco come ottenere i grafici di F1 ed F2 con uno **script**.

2. Sistemi di equazioni

Abbiamo più volte considerato condizioni ottenute combinando equazioni con **AND**, indicato anche con **&** o **Λ**. Condizioni di questo genere sono chiamate ***sistemi di equazioni***. In genere sono scritte in modo "abbreviato", usando una parentesi graffa invece di AND:

$$\textit{Equazione1} \text{ AND } \textit{Equazione2} \text{ AND } \textit{Equazione3} \longrightarrow \begin{cases} \textit{Equazione1} \\ \textit{Equazione2} \\ \textit{Equazione3} \end{cases}$$

$x^2+y^2=100$ **&** $x=6$, $x^2+y^2=100$ **&** $y=6$, $x^2+y^2=100$ **&** $y=x$, $x^2+y^2=100$ **&** $y=x^2-12$ sono i sistemi che indicano l'intersezione del cerchio di centro (0,0) e raggio 10 con alcune rette e con una parabola:



Nel primo caso le intersezioni sono i punti (6,8) e (6,−8). Infatti sostituendo 6 a x e 8 a y il sistema assume la forma a lato. Entrambe le equazioni sono vere quindi, poiché "vero" AND "vero" fa "vero", il sistema è vero. Se sostituisco 6 a x e −8 a y il sistema si trasforma nello stesso modo. Si dice anche che (6,8) e (6,−8) sono ***soluzioni*** del sistema $x^2+y^2=100$ **&** $x=6$ ***rispetto*** alla coppia incognita (x,y).

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 36+64=100 \\ 6=6 \end{cases}$$

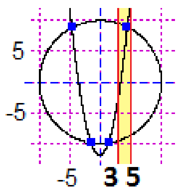
Si dice anche che le soluzioni sono (x,y)=(6,8) e (x,y)=(6,−8) o che sono quelle indicate a lato o che il sistema equivale a (x=6 & y=8) OR (x=6 & y=−8).

$$\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases}$$

5 Risolvete, rispetto a (x,y), il secondo sistema e il terzo.

6 Quante soluzioni, rispetto all'incognita (x,y), ha il quarto sistema?

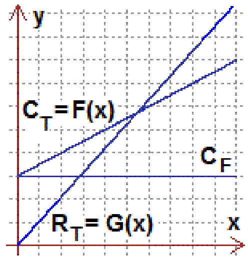
Per rispondere all'ultimo quesito senza fare calcoli ci siamo riferiti ai grafici delle due equazioni. Ad essere rigorosi, il solo vedere che *una curva "scavalca" l'altra* non ci assicura che tali curve abbiano un punto in comune là dove avviene lo scavalcamento. Tuttavia la parabola e il cerchio sono ***curve "continue"***, senza "buchi": la prima è il grafico di una funzione continua, mentre la seconda è l'unione dei grafici delle due funzioni continue $x \to \sqrt{(100-x^2)}$ e $x \to -\sqrt{(100-x^2)}$.



Posso trovare facilmente l'intersezione di due curve "continue" col computer, facendone il grafico e operando con degli zoom. Posso anche trovarle numericamente, in forma approssimata. Abbiamo visto come farlo con uno script per le equazioni polinomiali. In modo simile si può fare, definendo degli opportuni script, per una qualunque F(x)=0. **Questo** lo fa nel caso di $F(x) = \sqrt{(100-x^2)}-(x^2-12)$. Verifica che nel caso illustrato a fianco x vale 4.571011607295256. Trova poi con una delle "nostre" CT che il valore corrispondente di y è 8.894147114027968.

7 Trova le coordinate degli altri tre punti di intersezione.

Anche nella scheda *Modelli matematici per l'economia* abbiamo più volte affrontato problemi che si presentavano come la ricerca di un'intersezione tra due grafici. Ad esempio per trovare il volume di produzione x per cui i ricavi pareggiano i costi posso intersecare i grafici delle funzioni F e G che esprimono C_T e R_T in funzione di x ($C_T = F(x)$, $R_T = G(x)$).



Questo problema grafico si traduce nel sistema y = F(x) & y = G(x).

Dall'equazione F(x) = G(x) posso ricavare l'ascissa del punto di intersezione. Per ricavare l'ordinata (cioè, in questo caso, l'ammontare dei costi oppure dei ricavi) posso poi impiegare y=F(x) oppure y=G(x).

8 Come dividere una quantità A in tre parti, in modo che la prima sia il doppio della seconda e che la seconda sia il triplo della terza? Indicando le tre parti con x, y e z, possiamo esprimere il problema con il seguente sistema (1) di 3 equazioni e risolverlo assumendo (x,y,z) come terna incognita e A come parametro.

$$\overset{(1)}{\begin{cases} x+y+z = A \\ x = 2y \\ y = 3z \end{cases}} \quad \overset{(2)}{\begin{cases} x+y+z = A \\ x = 6z \\ y = 3z \end{cases}} \quad \overset{(3)}{\begin{cases} 6z+3z+z = A \\ x = 6z \\ y = 3z \end{cases}} \quad \overset{(4)}{\begin{cases} 10z = A \\ x = 6z \\ y = 3z \end{cases}} \quad \overset{(5)}{\begin{cases} z = A/10 \\ x = 6A/10 \\ y = 3A/10 \end{cases}}$$

A destra del sistema (1) sono riportate alcune successive trasformazioni, fino al sistema finale (5) in cui x, y e z sono espresse in funzione del parametro A. • Qual è la soluzione del problema se A è 100? • Spiegate procedimenti e ragionamenti che si sono operati durante le trasformazioni.

Per la risoluzione dei sistemi valgono ***considerazioni generali*** analoghe a quelle già svolte a proposito della risoluzione di equazioni:

- in assenza di parametri, se l'incognita è una coppia di variabili, si può ricorrere a *metodi grafici;*
- *prima di mettersi a fare manipolazioni* è bene comprendere il significato delle relazioni espresse dalle equazioni che compongono il sistema, per vedere se ci sono modi semplici per individuare direttamente le soluzioni e, comunque, cercare d'intraprendere la strada più conveniente;

[per il sistema y = x+2 & y = x posso concludere subito che non esistono soluzioni, in quanto x è sempre diverso da x+2]

- è opportuno prestare attenzione al *dominio* delle varie equazioni (il sistema è definito quando sono definite tutte le equazioni che lo compongono);

[$y = \sqrt{(1-x)}$ & $y^2+3 = -(1-x)$ è definito se $1-x \ge 0$; posso dedurne la falsit della seconda equazione, e quindi dell'intero sistema]

- la *quantit delle soluzioni* può variare da sistema a sistema;
- è opportuno *verificare* le soluzioni trovate.

Risolvendo un sistema mediante ***manipolazioni*** in genere, come si è fatto per il sistema del *quesito 8,* si cerca di "***eliminare***" delle incognite da una o più equazioni, fino ad arrivare a un'equazione in cui ce n'è una sola: l'equazione 6z+3z+z = A del passo (3). Si risolve questa, poi si ricavano, utilizzando le altre equazioni, i corrispondenti valori delle altre variabili, come si è fatto al passo (5).

Per manipolare un sistema di equazioni trasformandolo in un sistema ad esso equivalente, oltre che manipolare le singole equazioni con i procedimenti gi visti nella scheda 1, posso usare specifiche riscritture. Le più usate sono le seguenti:

- Volendo, si può ***cambiare l'ordine delle equazioni***. infatti l'operatore **&** è commutativo.

$$\begin{cases} a+b+4 = 0 \\ b-1 = a \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} b-1 = a \\ a+b+4 = 0 \end{cases}$$

- Si può ***sostituire*** un sottotermine α con un termine β se nel sistema è presente l'equazione α = β (o β = α) che impone l'uguaglianza tra α e β.

Nel quesito 8, nella trasformazione (1)→(2) si è sostituito y della 2ª equazione con 3z, perché la 3ª equazione impone che y e 3z siano uguali. Nella trasformazione (2)→(3) si sono sostituiti x e y della 1ª equazione con 6z e 3z rispettivamente, perché la loro uguaglianza a x e y è imposta dalla 2ª e dalla 3ª equazione.

- Si possono ***addizionare*** al 1 e al 2 membro di un'equazione rispettivamente il termine α e β se nel sistema è presente l'equazione α = β (o β = α) che impone l'uguaglianza tra α e β.

Esempio. Osservando il sistema (1) qui sotto, vedo che se addiziono x−y a x+y posso eliminare la y. Quindi trasformo la prima equazione addizionando x−y al 1 membro e 3 al 2 : posso farlo perché l'uguaglianza tra x−y e 3 è imposta dalla seconda equazione. In questo modo ottengo il sistema (2), che posso semplificare in (3), in cui la prima equazione contiene solo la variabile x:

$$\overset{(1)}{\begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 3 \end{cases}} \quad \overset{(2)}{\begin{cases} x+y+x-y = 1+3 \\ x-y = 3 \end{cases}} \quad \overset{(3)}{\begin{cases} 2x = 4 \\ x-y = 3 \end{cases}} \quad \overset{(4)}{\begin{cases} x = 2 \\ x-3 = y \end{cases}} \quad \overset{(5)}{\begin{cases} x = 2 \\ y = x-3 \end{cases}} \quad \overset{(6)}{\begin{cases} x = 2 \\ y = 2-3 \end{cases}} \quad \overset{(7)}{\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}}$$

Poi procedo ricavando x e poi y.

Nota. *Non c'è un'unica strada risolutiva.* Ad esempio l'ultimo sistema avrei potuto risolverlo cos :

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ -x+y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y-x+y = 1-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ 2y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1-y \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1+1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

oppure cos :

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ x = y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} (y+3)+y = 1 \\ x = y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = -2 \\ x = y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = -1+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \ldots$$

9 Quali tipi di trasformazioni sono state operate nei due esempi di risoluzione proposti nella nota precedente?

10 Risolvi il seguente sistema operando le trasformazioni indicate. Se ti sembra che sia il caso, svolgi qualche trasformazione intermedia su un altro foglio di carta.

$$\begin{cases} 3a = 2(b-3) \\ 1 = 3(b-3)-a \end{cases} \qquad \begin{cases} \quad = \quad \\ \quad = \quad \end{cases} \qquad \begin{cases} \quad = \quad \\ \quad = \quad \end{cases}$$

applica "·3" alla 1ª eq. e "·2" alla 2ª

applica la negazione alla 2ª eq.

$\begin{cases} \quad = \\ \quad = \end{cases}$

$\begin{cases} \quad = \\ a = \end{cases}$

$\begin{cases} \quad = \\ a = \end{cases}$

somma al 1° e al 2° membro della 2ª eq. 1° e 2° membro della 1ª

risolvi la 2ª eq.

sostituisci nella 1ª eq. ad a la soluzione appena trovata

$\begin{cases} b = \\ a = \end{cases}$

risolvi la 1ª eq.

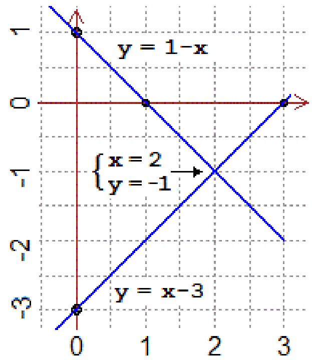
A volte anche le equazioni contenenti più variabili vengono risolte non rispetto a una variabile ma a una coppia o a una terna di variabili. Ad esempio di fronte all'equazione $x^2+y^2 = r^2$ (r > 0) posso pormi il problema di risolverla *rispetto a y* (cercare termini che esprimano y in funzione di x), ottenendo $y = \sqrt{(r^2-x^2)}$ e $y = -\sqrt{(r^2-x^2)}$, o quello di *risolverla rispetto a (x,y)* (trovare coppie di numeri che sostituiti, in ordine, a x e y rendano vera l'equazione): in questo secondo caso le soluzioni sono le coordinate dei punti del cerchio di centro (0,0) e raggio r.

Proviamo a risolvere rispetto a (x,y) l'equazione $(x-2)^2+(2x-y+3)^2=0$. Poiché $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2=0$ è vera solo quando **a** = 0 **&** **b** = 0 posso ricondurmi alla risoluzione del sistema x−2 = 0 **&** 2x−y+3 = 0.

$\boxed{11}$ Completa la risoluzione di questa equazione.

3. Sistemi lineari

Alcuni tipi di sistemi sono particolarmente facili da risolvere, sia graficamente (se non contengono parametri), sia con manipolazioni. Si tratta dei *sistemi interpretabili come intersezione tra due rette.*



A lato è raffigurato il sistema x+y = 1 **&** x−y = 3, già risolto nel paragrafo precedente.

Avrei potuto concludere subito, anche senza grafici, che questo sistema ha esattamente 1 soluzione: la 1ª equazione è trasformabile in y = −x+… per cui rappresenta una retta con pendenza −1; la 2ª è trasformabile in y = x+… per cui rappresenta una retta con pendenza 1. Avendo *pendenze diverse* le due rette si intersecano.

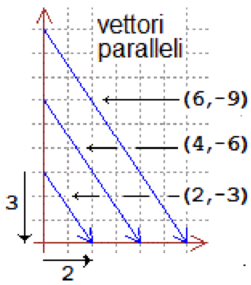
Volendo tracciare a mano le due rette, possiamo completare la trasformazione nella forma y = … e trovare le *intercette* 1 e −3, e poi far partire da (0,1) una retta con pendenza −1 e da (0,−3) una retta con pendenza 1.

Per tracciare le rette potevo anche, per ciascuna di esse, trovarne due punti e disegnare un tratto rettilineo passante per essi. In genere una coppia di punti facile da determinare è quella costituita dalle *intersezioni con gli assi.*

$\begin{cases} \text{eq. 1}^a\text{ retta} \\ \text{equaz. asse x} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=0} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{eq. 1}^a\text{ retta} \\ \text{equaz. asse y} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{y=1} \\ \boldsymbol{x=0} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{eq. 2}^a\text{ retta} \\ \text{equaz. asse x} \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=3 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=0} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{eq. 2}^a\text{ retta} \\ \text{equaz. asse y} \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=3 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{y=-3} \\ \boldsymbol{x=0} \end{cases}$

Per stabilire se due *rette* sono *parallele* spesso si può fare a meno di calcolarne le pendenze. Basta osservare che, ad esempio, le equazioni 3x+2y+1 = 0, 3x+2y−7 = 0, 30x+20y+10 = 0, 6x+4y−2 = 0, −6x−4y+3 = 0, … rappresentano rette parallele in quanto sono tutte trasformabili nella forma y = −3/2x+…, in quanto, ad es., 30/20 = 6/4 = 3/2.



Più in generale data la retta di equazione $ax+by+c=0$ ogni retta ad essa parallela è descrivibile con un'equazione del tipo $ux+vy+w=0$ con $(u,v) = k(a,b)$ per qualche k≠0.

Ad esempio sono parallele a 3x+2y+1 = 0 anche 0.3x+0.2y−9 = 0, 1.5x+y = 0, −9x−6y+8 = 0, ottenute con k=0.1, k=1/2, k=−3.

È facile, infatti, dimostrare che la retta di equazione $ax+by+c=0$ è parallela al vettore $(b,-a)$. E − vedi la figura a lato − i vettori paralleli a un vettore dato sono quelli ottenibili da esso moltiplicandone le componenti per uno stesso numero diverso da 0 (➜ *La matematica e lo spazio*, scheda 2, §3).

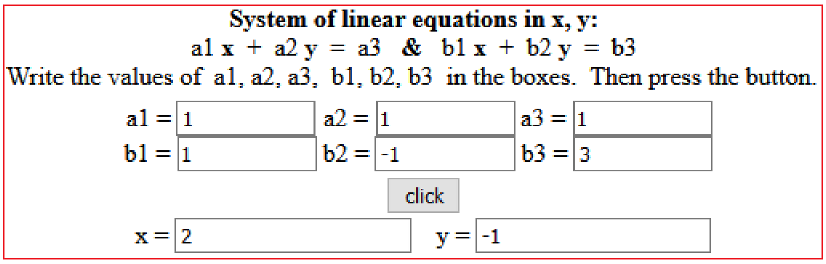
Le equazioni del tipo $ax+by+c=0$ rappresentano rette (*a patto che* a *e* b *non siano entrambi nulli,* altrimenti ci ricondurremmo all'equazione 0x+0y+c=0, che è o sempre vera − e rappresenterebbe l'intero piano − o è sempre falsa − e rappresenterebbe l'insieme vuoto).

Come abbiamo chiamato *funzioni lineari* le funzioni x → kx+h che hanno per grafici rette, così chiamiamo ***equazioni lineari*** in x e y queste equazioni.

I sistemi costituiti da due equazioni lineari (rispetto alla stessa coppia di variabili) vengono detti ***sistemi lineari***. Essi possono avere:

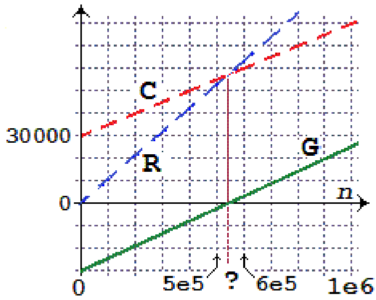
- *1 soluzione,* se le due equazioni rappresentano rette non parallele,
- *0 soluzioni,* se esse rappresentano due rette parallele,
- o come soluzione *ogni coppia* (x,y) che sia un punto della retta rappresentata dalle due equazioni, se queste sono equivalenti.

Come abbiamo visto, per risolvere un sistema lineare si usano procedimenti diversi, che dipendono dalle particolari equazioni che si hanno di fronte. Per mettere a punto un programma generale, che consenta di risolvere un generico sistema lineare, conviene esprimere mediante delle formule le soluzioni. È quello che è stato fatto per mettere a punto il seguente programmino in JS, a cui puoi accedere **da qui**, di cui vediamo il funzionamento per risolvere il sistema precedente (x+y=1 & x-y=3):



12 Usa il programmino precedente per risolvere i sistemi seguenti e commenta gli esiti:
$x+y = 1$ & $x-y = 2$; $2x+y = -1$ & $x+0.7y = 2$;
$x+2y = 4$ & $3x+6y = 12$; $x+2y = 4$ & $3x+6y = 10$.

4. Risoluzione di disequazioni - Funzioni crescenti e funzioni decrescenti



Abbiamo considerato più volte ➜ ***disequazioni***, ad esempio per descrivere *figure* e nelle attività di *calcolo approssimato*. Le abbiamo in particolare usate per descrivere *situazioni economiche.*
Ad es. la disequazione **R ≥ C** (ricavo totale che supera il costo totale) indica una attività produttiva non in perdita (il "?", nel grafico a lato, è il volume di produzione che segna il passaggio da una situazione di passivo a una di attivo).
Le disequazioni sono condizioni, così come le equazioni e i sistemi di equazioni. Quando contengono variabili ci si può porre anche per esse il problema di *risolverle* rispetto a una variabile fissata (o a una coppia di variabili o …).

Alcune "disequazioni", come la seguente, ad essere rigorosi non sono delle vere e proprie disequazioni, ma sono dei *sistemi di disequazioni.* Comunque, per comodità, le chiameremo in genere disequazioni.

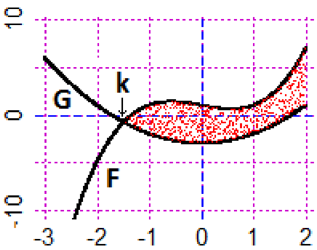
$$3 \le x < 7 \text{ sta per: } \begin{cases} 3 \le x \\ x < 7 \end{cases} \text{ cioè per: } 3 \le x \ \ \& \ \ x < 7$$

Occupiamoci della risoluzione di *disequazioni contenenti un'unica variabile.*

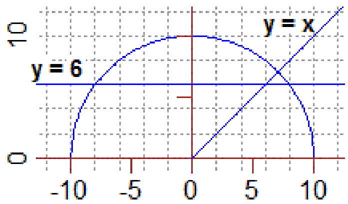
Ad es. di fronte alle equazioni $R = 0.105n$ e $C = 30000+0.05n$ e al problema di stabilire per quali n $R > C$, cioè di risolvere rispetto a n la disequazione $0.105n > 30000+0.05n$, possiamo tracciare i grafici di $n \to 0.105n$ e di $n \to 30000+0.05n$ e individuare, approssimativamente, per quali valori di n il primo sta sopra al secondo.
Oppure possiamo ricondurci allo studio del segno della differenza G tra R e C [$G = R-C = 0.105n - (30000+0.05n) = -30000+0.055n$]: le soluzioni sono gli n per cui il grafico di G sta sopra all'asse orizzontale, cioè, *circa* gli n maggiori di 500 000 ($n > 500\,000$).

Se voglio trovare con più precisione a partire da quale n si ha $G>0$ posso fare degli zoom, oppure posso risolvere algebricamente l'equazione $G=0$, cioè: $-30000+0.055n=0$, ottenendo: $n = 30\,000/0.055 = 545\,454.5$.
Se n può variare solo in **N** devo considerare $n > 545\,454$, ovvero $n \ge 545\,455$.

Il metodo ora visto, cioè ***metodo grafico*** (per capire come sono fatti gli intervalli costituiti dalle soluzioni) **più *metodo algebrico*** (per trovare gli estremi di tali intervalli), è, in genere, il più conveniente.



13 Siano $F(x) = x^3-x+1$, $G(x) = x^2-3$, $H(x) = F(x)-G(x)$. Utilizzando le seguenti uscite grafiche, si può dedurre che la disequazione in x $F(x) \ge G(x)$ ha per soluzioni i numeri che stanno in un intervallo del tipo $[k,\infty)$.
- *Come* è l'intervallo delle soluzioni di $x^3-x+1 > x^2-3$? e quello di $x^3-x+1 \le x^2-3$?
- Dai grafici riprodotti si *ricava* che il valore di k è tra -2 e -1. Utilizzando lo script **eq.polinomiale** trova con più cifre la soluzione (devi trovare le 2 cifre che mancano a: **−1.48___839976886**)

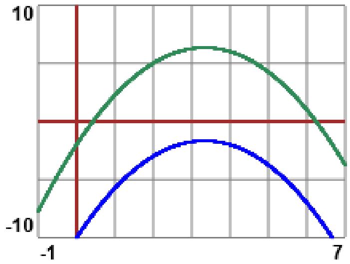


14 Nel caso del quesito precedente non sapete trovare quanto vale k con metodi algebrici.
Nel caso della disequazione $\sqrt{100-x^2} > 6$, che ha come soluzione un intervallo $(-k, k)$, abbiamo già trovato esattamente k affrontando il quesito 5: h=8.
Risolvete esattamente la disequazione $\sqrt{100-x^2} \le x$.

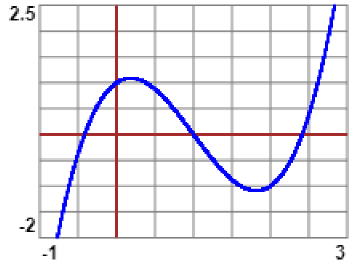
Per il metodo grafico valgono le osservazioni critiche già svolte a proposito della risoluzione delle equazioni, e in particolare il fatto che, senza considerazioni teoriche, non posso essere certo che, fuori dall'intervallo considerato, la funzione (o le funzioni) rappresentate non cambino andamento e non vi siano ulteriori intersezioni. Su ciò torneremo in una prossima scheda.

Osserviamo, per ora, che le funzioni del tipo $\mathbf{x \to ax^2}$ hanno come grafico una *parabola* con la *concavità* rivolta verso l'*alto* se ***a*>0**, verso il *basso* se ***a*<0**. Traslando il grafico di $x \to ax^2$ ottengo quello di una funzione $x \to ax^2+\ldots$. Questo grafico, essendo frutto di una traslazione, ha la concavità rivolta come quella del grafico di $x \to ax^2$.

15 Le funzioni F: $x \to -3/4x^2+5x-10$ e G: $x \to -3/4x^2+5x-2$ hanno grafici traslati di quello di $x \to -3/4x^2$ (come vedremo nella scheda sulle Funzioni Polinomiali). Anche senza tracciarli, so che hanno la concavità verso il basso.
(1) *Posso* stabilire a priori se le disequazioni $F(x)<0$ e $G(x)<0$ hanno soluzioni o sono false?
(2) Utilizzando i grafici tracciati (qual è quello di F? e quello di G?) individua, eventualmente in modo approssimato, gli intervalli delle soluzioni di esse.
(3) Utilizzando lo script **eq.polinomiale** completa le seguenti approssimazioni delle ascisse in cui uno dei due grafici interseca l'asse x: 0.4...400704306218 e 6.2..26596236045.



16 A fianco è riprodotto parzialmente il grafico di una funzione F. Supponiamo che, sia a sinistra che a destra dell'intervallo $[-0.5, 2.5]$, F "cresca", cioè abbia pendenza positiva. Determina, approssimativamente, l'intervallo (o gli intervalli) in cui F assume valori non negativi, cioè risolvi la disequazione $F(x)\ge 0$.

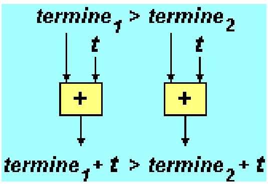


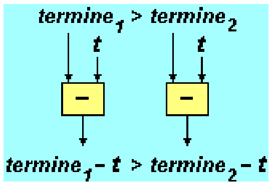
Per risolvere una disequazione si usano manipolazioni simili a quelle impiegate per risolvere equazioni, considerate nella scheda 1: "invertire la disequazione" ($\mathbf{a<b \to b>a}$) e:

- *sostituire* un membro della disequazione con un *termine* ad esso *equivalente:*
  ciò richiede attenzioni *simili* a quelle per le equazioni (il dominio può cambiare);
- ***applicare una funzione*** a entrambi i membri:
  ciò richiede *qualche attenzione* ***in più,*** come ora vedremo.

Incominciamo dalle manipolazioni che non creano problemi.

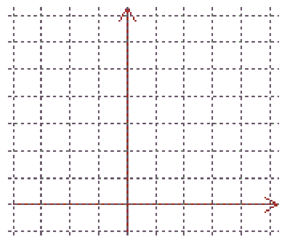
Si è già visto "graficamente" che una disequazione $F(x)>G(x)$ è equivalente a $F(x)-G(x)>0$. Possiamo pensare questa trasformazione come frutto dell'applicazione di "$-G(x)$" ai due membri e di una successiva semplificazione.
Anche "algebricamente" la giustificazione è semplice: se addiziono (o sottraggo) lo stesso numero a due numeri A e B, ottengo due nuovi numeri A' e B' che sono nello stesso ordine che c'era tra A e B.





(occorre prestare attenzione ai cambiamenti di dominio se ***t*** contiene la variabile rispetto a cui risolviamo la disequazione)

17 Risolvi algebricamente la disequazione $x+3 > 2x-1$ applicando "$-x$" e "$+1$". Controlla le soluzioni graficamente ("schizza" i grafici di $x \to x+3$ e di $x \to 2x-1$ e osserva in quale intervallo il primo sta sopra al secondo).



Di fronte a **(1)** $3x < 1.2$ e a **(2)** $-x/2 > 9$ potrei pensare di applicare:
nel caso (1) "$\cdot 1/3$": $3x<1.2 \to x<1.2/3 \to x<0.4 \to$ soluzioni: $(-\infty, 0.4)$;
nel caso (2) "$\cdot(-2)$": $-x/2>9 \to x>9\cdot(-2) \to x>-18 \to$ soluzioni: $(-18, \infty)$

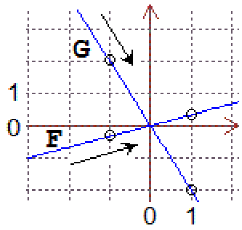
Se proviamo a fare la ***verifica*** per qualche valore ci rendiamo conto che nel caso **(2)** qualcosa non torna: 0 sta in $(-18, \infty)$ ma *non* verifica la disequazione; infatti $-0/2 = 0$ e $0>9$ è falsa.

Applicando "$\cdot(-2)$" ai numeri 0 e 9, con $0<9$, si ottengono i numeri 0 e -18, con $0>-18$: la applicazione di "$\cdot(-2)$" inverte la relazione d'ordine esistente tra i due numeri.

Per precisare queste considerazioni introduciamo le seguenti definizioni, relative a concetti che abbiamo già usato molte volte:

- una *funzione* F è detta ***crescente*** in un *intervallo* **I** se:
  è definita in I e *all'aumentare dell'input* (preso in I) *l'output aumenta*
  cioè se: comunque prenda $x_1 < x_2$ in I si ha $F(x_1) < F(x_2)$
- una *funzione* F è detta ***decrescente*** in un *intervallo* **I** se:
  è definita in I e *all'aumentare dell'input* (preso in I) *l'output diminuisce*
  cioè se: comunque prenda $x_1 < x_2$ in I si ha $F(x_1) > F(x_2)$

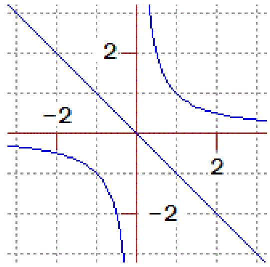
A lato sono riprodotti parzialmente i grafici delle funzioni F: $x \to x/3$ e G: $x \to -2x$, la prima crescente, la seconda decrescente. Applicando F ai membri di una disequazione non occorre "invertire" il simbolo ("<" o ">"), come invece è necessario fare se si applica G.



18 Considera la funzione F del quesito 16. Determina gli estremi degli intervalli in cui cresce e di quelli in cui decresce.

Due funzioni importanti sono la negazione (o "cambio segno"), $x \to -x$, e il passaggio al reciproco, $x \to 1/x$, di cui a lato sono riprodotti parte dei grafici:

- la prima è decrescente in **R**
- la seconda, definita in $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$, è decrescente sia in $(-\infty,0)$ che in $(0,\infty)$.

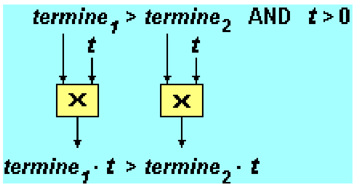


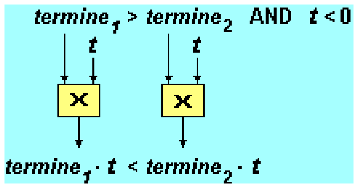
19 Risolvi le seguenti disequazioni applicando opportunamente (come prima trasformazione) la negazione o il passaggio al reciproco:

$-(x+1) > 3$

$1/x > 2$ [per $x<0$ la disequazione è falsa; puoi quindi restringerti all'intervallo $(0,\infty)$]

Sulla risoluzione delle disequazioni ritornerai nel corso nei prossimi anni. Ci limitiamo solo a ricordare i procedimenti schematizzati sotto: se moltiplico per lo stesso numero positivo [negativo] due numeri A e B ottengo due nuovi numeri A' e B' che sono nello stesso ordine [nell'ordine opposto a quello] che c'era tra A e B.





20 Utilizza questi procedimenti per risolvere nel modo più semplice possibile le disequazioni:
$(x+1)/(x^2+1) > (x-2)/(x^2+1)$ $\quad$ $(x+1)/(-5-x^2) > (x-2)/(-5-x^2)$

21 Studia graficamente (eventualmente usando **R**) le disequazioni dei quesiti 21 e 22.

5. Esercizi

e1 Traccia il grafico di $x \to |x+3|$ e poi risolvi: $|x+3| < 5$, $|x+3| > 1$, $2 \le |x+3| < 4$

e2 Risolvi il sistema lineare $2x + y = 3$ & $x + 2y = 3$. Prima danne una rappresentazione grafica, poi opera mediante manipolazioni di tipo algebrico.

e3 Senza tracciarle si può stabilire che le rette di equazioni $y = x+3$, $y = 2x-2$, $x+2y = 4$ si intersecano formando un triangolo; perché? Una coppia di tali rette sono perpendicolari, quali? Come puoi calcolare l'area di questo triangolo?

e4 Due località A e B distano 80 km lungo la linea ferroviaria. Nello stesso istante due treni passano uno per A andando verso B, l'altro per B andando verso A. Il primo treno viaggia alla velocità costante di 120 km/h, il secondo alla velocità costante di 90 km/h. I treni non fanno fermate intermedie. Quando e dove i due treni si incontrano (rispondi arrotondando il tempo ai minuti e indicando la distanza da A arrotondata ai chilometri)?

e5 Trova due numeri tali che il rapporto tra essi diventi uguale ad 1 se aggiungiamo 4 al primo e diventi uguale ad 1/4 se aggiungiamo 5 al secondo (indica con x ed y i due numeri, esprimi le due condizioni con delle equazioni in x ed y e risolvi il sistema tra esse).

e6 Risolvi rispetto ad x la disequazione $2/x > 3$. Trovata la soluzione, usa del software per fare i grafici delle funzioni $x \to 2/x$ e $x \to 3$. I grafici confermano la correttezza della tua risposta?

e7 Rappresenta graficamente la disequazione $x/2+1 > 2x-1$. Risolvila (rispetto ad x) in modo approssimato usando i grafici di $x \to x/2+1$ e di $x \to 2x-1$ e, quindi, esattamente mediante manipolazioni di tipo algebrico.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
funzione continua (1), *sistema di equazioni* (2), *equazioni e sistemi lineari* (3), *funzione crescente, decrescente* (4).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale F1F2 eq.nonPolin sistemaLin