Funzioni ed equazioni

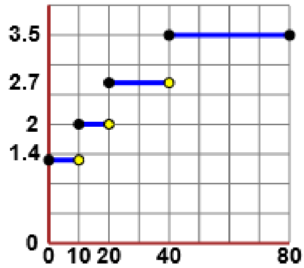
Modelli matematici per studiare relazioni tra grandezze

Scheda **1**

0. Introduzione

Sin dalla prima u.d. abbiamo usato molte volte funzioni ed equazioni per rappresentare fenomeni di vario genere. In questa u.d. approfondiremo l'esame di tali concetti, che sono ricorrenti in ogni applicazione della matematica.

1. Funzioni numeriche e non



km	tariffa
0 - 9	1.4
10 - 19	2
20 - 39	2.7
40 - 80	3.5

La tabella a sinistra rappresenta le tariffe praticate da una società di trasporti su autobus, che, più precisamente, sono pari a 1.4 € se la percorrenza è inferiore a 10 km, a 2 € se, altrimenti, è inferiore a 20 km, a 2.7 € se, altrimenti, è inferiore a 40, a 3.5 € altrimenti (le corse non superano gli 80 km).
Il grafico a destra rappresenta la ***tariffa*** (in €) in funzione della ***percorrenza*** (in km). **[Qui](#)** trovi lo **script** con cui stato tracciato il grafico.

tariffa	km
1.4	[0, 10)
2	[10, 20)
2.7	[20, 39)
3.5	[40, 80]

Possiamo pensare la *percorrenza* come funzione della *tariffa*? Evidentemente **no**: ad es. la tariffa di 2.7 € può corrispondere ad una percorrenza di 21 km o di 25 km.
Se invece consideriamo per ogni tariffa T l'intervallo delle percorrenze P che hanno tale tariffa, possiamo dire che P è funzione di T; ad ognuna delle tariffe T corrisponde un particolare intervallo di percorrenze P. Si tratta di una funzione che ha come *input* ***numeri*** e come *output* ***intervalli*** di numeri.

1 Nell'u.d. *Le statistiche* abbiamo utilizzato spesso una funzione a cui viene dato in input una *sequenza finita di numeri* e che ha come output un numero. Di che funzione si tratta?

Abbiamo considerato anche funzioni a cui si danno in input stringhe e/o hanno come output stringhe. Ad esempio in molte applicazioni esistono comandi che a più stringhe associano la stringa frutto della loro concatenazione, comandi che ad una stringa associano la sua lunghezza o una particolare sottostringa. **[Qui](#)** trovi uno **script** in cui ciò è esemplificato.

Se gli input di una funzione sono in quantità finita, essa può essere descritta elencando in una tabella tutte le possibili coppie "input → output". In altri casi può essere descritta con un procedimento di calcolo che consente di determinare per ogni input l'output corrispondente. Ecco alcuni esempi:

I		**O**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

significato di AND (o &)

funzione rappresentabile completamente mediante tabella

I		**O**
"ba"	"co"	"baco"
"ba"	"cio"	"bacio"
"r"	"oro"	"roro"
...	...	...

concatenazione

I	**O**
0, 1	0.5
2, 3.5	2.75
1.2, 1.3, 1.2, 1.1	1.2
...	...

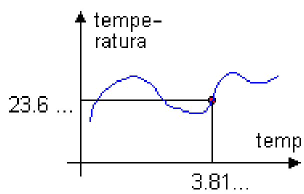
media

I	**O**
-1	1
0	0
0.3	0.9
...	...

$x \to x^2$

funzioni non rappresentabili completamente mediante tabelle

In molti casi ancora non sono possibili neanche questi tipi di descrizione. Ad esempio se, fissata una località, associo ad ogni giorno G la temperatura massima in gradi T che lì si è manifestata in tale data, sicuramente sono di fronte a una funzione (ad ogni valore di G corrisponde un valore di T) ma non è detto che disponga di un apparecchio per registrare tale valore e, in ogni caso, non so quale sarà domani il valore di T.
Se uso un dipositivo per registrare i valori di T in continuazione, anche la funzione che associa ad *ogni* istante passato la temperatura corrispondente non è descrivibile nè con una tabella né con un procedimento di calcolo.



funzione non rappresentabile né con una tabella né con un procedimento di calcolo

Ogni funzione a 1 input e 1 output in **R** è, comunque, interpretabile come *grafico,* cioè come *insieme di punti,* ovvero come *insieme di coppie* x,y di elementi di **R**: il punto (3.81…, 23.6…) evidenziato nella figura precedente rappresenta l'associazione 3.81… → 23.6….

Possiamo dire che in ogni caso abbiamo l'accoppiamento in modo non ambiguo di un *input* a un *output* (*input → output*), nel senso che se si ripete lo stesso input non si può ottenere un output diverso. Ecco come si può tradurre questa idea sotto forma di definizioni un po' più formalizzate:

Dati due insiemi **I** e **O** di oggetti matematici, una ***funzione*** a *input* in **I** e *output* in **O** è un *insieme* **F** di coppie a, b con $a \in$ **I** e $b \in$ **O** tale che per ogni a in **I** accada uno dei due seguenti fatti:

[con "$a \to b$" indichiamo "la coppia a, b", ossia l'accoppiamento di a a b]

(1) c'è un *unico* oggetto b di **O** tale che $a \to b$ stia in **F** (ossia per a c'è un solo accoppiamento);

F(a) è ***definito*** e b è l'output corrispondente tramite **F** all'input a;
si scrive **F**(a) = b o **F**: $a \to b$

(2) non c'è alcun oggetto b di **O** tale che $a \to b$ stia in **F** (ossia per a non ci sono accoppiamenti).

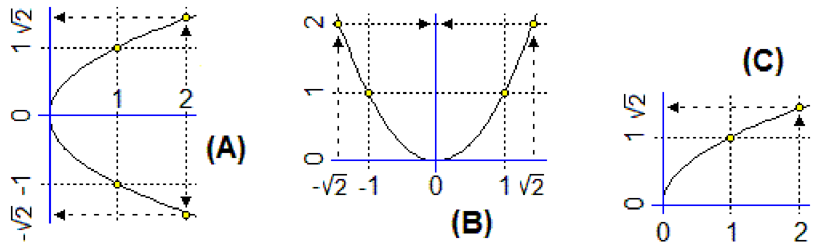
F(a) è ***indefinito*** ovvero all'input a **F** non associa alcun output.

L'insieme degli a per cui **F**(a) è definito si dice ***dominio*** (o *insieme di definizione*) di **F**.

tariffa	*km*
1.4	→ 0
	→ 1
	……
2	→ 10
	→ 11
	……
…	

Mentre la *percorrenza* non è funzione della *tariffa* in quanto, ad es., alla tariffa di 2 € posso far corrispondere sia la percorrenza di 10 che quella di 11 km, l'associazione dell'*intervallo delle percorrenze* alla *tariffa* corrispondente è una funzione.
Analogamente, nei casi sotto illustrati, mentre **(B)** e **(C)** sono funzioni ad input ed output numerici, **(A)** non lo è: ci sono frecce che partono dallo stesso x ed arrivano ad y diversi.

tariffa		*km*
1.4	→	[0, 10)
2	→	[10, 20)
2.7	→	[20, 39)
3.5	→	[40, 80]

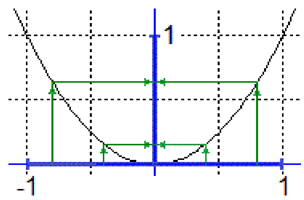


2 Quali sono i domini delle funzioni $x \to x^2$ e $x \to \sqrt{x}$ sopra rappresentate al centro e a destra della figura?

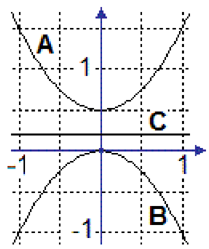
3 Nel caso della divisione ($x,y \to x/y$) gli input sono coppie di numeri, cioè **I** è costituito da coppie di elementi di **R**, e gli output sono numeri reali, cioè **O** è **R**. Qual è il dominio di questa funzione?

Se fisso un particolare insieme di input A per cui la funzione F è definita, l'insieme dei corrispondenti output, cioè $\{F(x) / x \in A\}$, viene indicato F(A) e chiamato *insieme* ***immagine*** di A mediante F. Ad es. se F è l'elevamento al quadrato e A è l'intervallo $[-1,1]$, F(A) = $[0,1]$. Ciò è evidenziato dalla figura a lato:

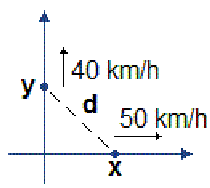
• ogni numero tra −1 e 1 ha come quadrato un numero tra 0 e 1: le frecce che partono da $[-1,1]$ sull'asse x arrivano in $[0,1]$ sull'asse y; cioè F(A) è contenuta in $[0,1]$;
• F(A) è non solo contenuta, ma uguale a $[0,1]$; infatti ogni numero tra 0 e 1 è ottenibile come quadrato di un numero tra −1 e 1: tutti i punti di $[0,1]$ sull'asse y sono raggiungibili con frecce che partono da $[-1,1]$ sull'asse x.



4 **(A)** Qual è l'immagine di $[-1,1]$ mediante la funzione $x \to x^2+1/2$?
(B) Qual è l'immagine del medesimo intervallo mediante la funzione $x \to -x^2$?
(C) Quanti sono gli elementi dell'immagine del medesimo intervallo mediante la funzione $x \to 0.2$?



2. Composizione di funzioni



Due navi partono dallo stesso punto. Una si muove in direzione nord con la velocità di 40 km/h, l'altra in direzione est a 50 km/h. Voglio *esprimere la distanza tra le due navi in funzione del tempo.*
Rappresento la situazione con un sistema di riferimento in cui (0,0) sia il punto di partenza, la direzione dell'asse orizzontale sia l'est, la direzione dell'asse verticale sia il nord, le unità sugli assi corrispondano a 1 km.

Indico con **t** il tempo in ore trascorso dalla partenza. Devo esprimere in funzione di **t** la posizione x della nave diretta a est e la posizione y della nave diretta a nord. Trovate queste espressioni potrò esprimere in funzione di **t** anche la distanza **d** tra le due navi, infatti: $\mathbf{d} = \sqrt{x^2+y^2}$. In **t** ore la nave diretta a est percorre $50 \cdot \mathbf{t}$ km, quindi $x = 50\mathbf{t}$. La nave diretta a nord percorre $40 \cdot \mathbf{t}$ km, quindi $y = 40\mathbf{t}$. Concludendo:

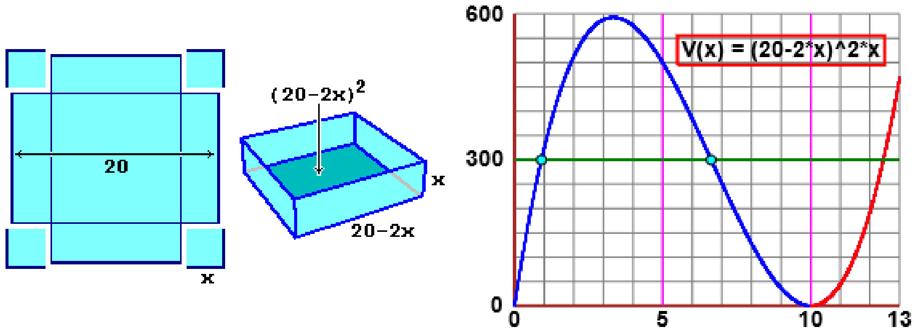
$$\mathbf{d} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(50\mathbf{t})^2+(40\mathbf{t})^2} = \sqrt{2500\mathbf{t}^2+1600\mathbf{t}^2} = \sqrt{4100\mathbf{t}^2} = \sqrt{4100}\,\mathbf{t} \approx 64\,\mathbf{t} \text{ (se } \mathbf{t}\geq 0\text{)}$$

Quindi la distanza tra le due navi aumenta proporzionalmente al tempo trascorso. Possiamo dire che una nave si allontana dall'altra alla velocità di 64 km/h.

Per costruire l'espressione di **d** in funzione di **t** ho dovuto prima esprimerla in funzione di x e di y, e poi ho espresso x e y in funzione di **t**. **Qui** trovi uno **script** che effettua tale calcolo. Prova ad usarlo per calcolare la distanza dopo un'ora e dopo 0.5 ore (mezz'ora) [**se** sei interessato, puoi esaminarne il codice].

Consideriamo un'altra situazione. Voglio studiare *quale può essere il volume* (o capacità) *di una scatola* costruita con un quadrato di lamiera di lato 20 cm nel modo illustrato sotto: si tagliano dagli angoli quattro quadrati uguali, poi si piega e salda in modo opportuno la

lamiera rimanente.
• Poiché l'aspetto che assume la scatola dipende da come taglio la lamiera, posso individuare nel lato dei quadrati che vengono tagliati via, che indico ad esempio con **x**, la variabile in funzione della quale esprimere il volume.
• Innanzi tutto devo ricordare come calcolare il volume V di un parallelepipedo. Basta fare "area di base per altezza", cioè calcolare l'area A di una qualunque faccia e moltiplicarla per la lunghezza h di uno spigolo ad essa perpendicolare: $V = A \cdot h$.
• Scelgo come "base" la faccia d'appoggio della scatola, che è un quadrato, e, quindi, come "altezza" prendo x. Se L è la misura del lato del quadrato di base, ho: $A = L^2$ e, quindi, $V = L^2 \cdot x$.



• A questo punto, per ottenere V in funzione di x devo esprimere anche L in funzione di x. La cosa è facile: la misura (in cm) del lato della lamiera è 20, quindi (vedi figura) $L = 20-2x$.
• Infine, sostituendo L con $20-2x$ in $V = L^2 \cdot x$, ottengo: $\mathbf{V = (20-2x)^2 \cdot x}$.

Questo è il modello matematico della nostra situazione. Ad essere preciso devo rappresentare matematicamente anche il fatto che non posso operare tagli lunghi a piacere: la lunghezza T dei tagli, oltre che positiva, deve essere inferiore a 10: dato che la lamiera è un quadrato di lato 20, affinché rimanga qualcosa, i 4 quadrati che taglio via devono avere lato inferiore a 10. Quindi il modello completo è:

$$\mathbf{V = (20-2x)^2 \cdot x \quad \& \quad 0 < x < 10}$$

Qui trovi come è stato tracciato il grafico di V (vedremo, dopo il quesito 5, come sono state trovate le ascisse dei punti di ordinata 300).

5 Trova l'approssimazione ai decimi delle soluzioni di V(x) = 300 utilizzando questo **zoom** dello script precedente.

$\mathbf{(20-2x)^2 \cdot x}$ posso trasformarlo in $\mathbf{4 \cdot x^3 - 80 \cdot x^2 - 400 \cdot x}$ ***sviluppando*** i calcoli. Posso trovare le soluzioni del quesito 5 risolvendo $4 \cdot x^3 - 80 \cdot x^2 - 400 \cdot x - 300 = 0$. Per ora non abbiamo gli strumenti per risolvere "a mano" le equazioni polinomiali. Lo facciamo usando il facile **script** **eq.polinomiale**.

6 Cosa devi mettere come input in tale script per trovare le soluzioni 0.907103304932525 e 6.638888245840114 (che poi posso arrotondare a 0.91 e 6.64).

7 Trova, arrotondata a tre cifre, l'ascissa del punto più a destra il cui il grafico di V ha ordinata 400.

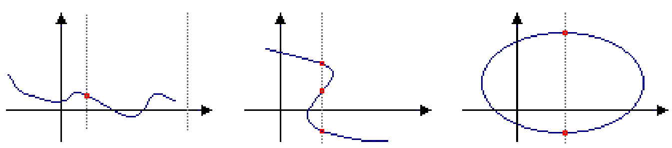
3. Funzioni a 1 input e 1 output in **R** *- Grafici e trasformazioni geometriche*

Una funzione che a un input numerico associa un output numerico (cioè una funzione per cui si assume come insieme di input e come insieme di output **R**) è rappresentabile graficamente sul piano cartesiano: ogni coppia $x \to y$ è rappresentata con il punto di ascissa x e ordinata y. Quando una figura piana A è interpretabile come grafico di una funzione?

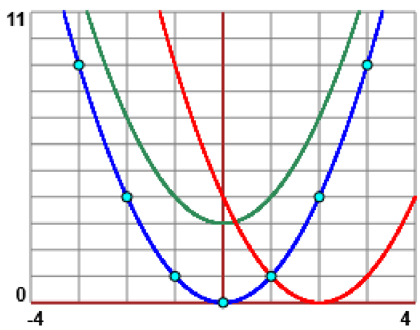
La definizione generale di funzione data in §1 diventa: per ogni retta **r** verticale (cioè parallela all'asse y) accade uno dei due seguenti fatti:

(1) **r** interseca A in un unico punto; (2) **r** non interseca A in alcun punto.

8 Tra le figure a lato, quali possono essere il grafico di una funzione?



9 A lato è tracciato il grafico di $F: x \to x^2$. Sono evidenziati i punti che corrispondono ad input interi. Sono schizzati anche i grafici di $G: x \to F(x)+3$ e di $H: x \to F(x-2)$.
(1) Associa ad ognuno di essi la relativa funzione.
(2) Come descriveresti, usando il concetto di *traslazione,* le relazioni tra il grafico di F e quelli di G e di H?
(3) E quella tra il grafico di G e quello di H?

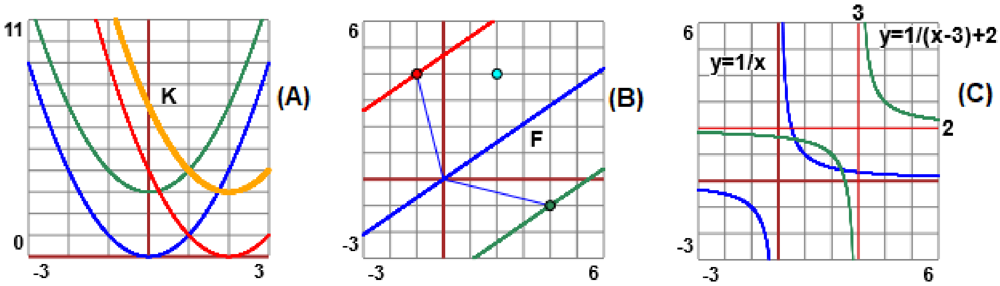


Dato il grafico di una funzione F il grafico della funzione $x \to \mathbf{F(x)+k}$ è una figura uguale al grafico di F ottenibile da esso mediante una traslazione verticale di passo $\Delta y = k$. Se k>0 il nuovo grafico è più in alto, se k<0 è più in basso. È facile capire perché accade ciò: gli output (cioè le y dei punti del grafico) sono tutti variati di k.

Il grafico della funzione $x \to \mathbf{F(x-h)}$ è una figura uguale al grafico di F ottenibile da esso mediante una traslazione orizzontale di passo $\Delta x = h$. Se h>0 il nuovo grafico è più a destra, se h<0 è più a sinistra. Per capire perché accade ciò pensa che, se h>0, sostituire x con x−h vuol dire dire "ritardare" l'effetto, ossia spostare il grafico a destra di h: quello che per F accade per 1 per la nuova funzione accade quando x−h = 1, ossia per x = 1+h.

In pratica *se modifico il valore della funzione aggiungendo o togliendo un valore, il grafico viene spostato verticalmente dello stesso valore.* Invece *se modifico l'input aggiungendo o togliendo un valore, il grafico viene spostato orizzontalmente di un valore opposto.*

10 Qual è la funzione K di cui in **(A)** è tracciato il grafico, assieme a quelli di F, G e H?



In generale, data una funzione F, la funzione che ha come grafico il grafico di F traslato con passi Δx = h, Δy = k è x → **F(x−h)+k**.

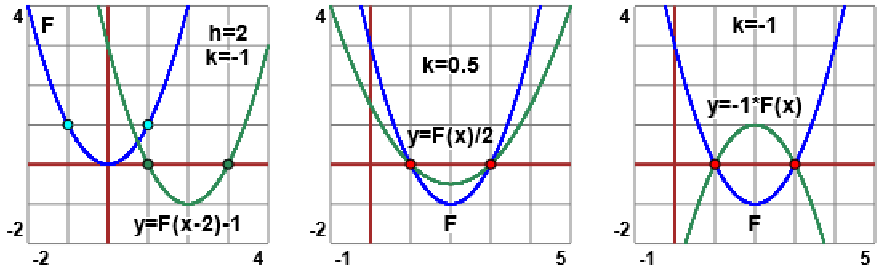
11 Nella figura **(B)** è tracciato il grafico di una funzione F costituito dalla retta passante per (0,0) con pendenza 0.7. Sono tracciati i grafici delle funzioni G ed H, ottenibili *traslando* il grafico di F con passi, rispettivamente, Δx = 4, Δy = −1 e Δx = −1, Δy = 4. Una funzione è x → F(x−4)−1, l'altra x → F(x+1)+4. *Quale* delle due è la descrizione analitica di G? *Qual* è il suo grafico? *Scrivi* l'equazione della retta con pendenza 0.7 passante per (2,4).

In **(C)** sono tracciate la figura di equazione y = 1/x e la figura ottenuta da questa con la traslazione di passi Δx = 3, Δy = 2. Sotto, in figura **(1)**, è tracciato il grafico di $y = (x-\mathbf{2})^2 - \mathbf{1}$ a partire da quello di $y = x^2$ mediante una traslazione a destra di **2** e in giù di **1**. Trovo facilmente, dal grafico, che le *intersezioni con l'asse x* corrispondono alle ascisse 1 e 3.

Con metodi algebrici avrei proceduto così:

(1) cerco per quali x è vera l'eq. $(x-2)^2-1=0$ (2) applico "+1" → $(x-2)^2=1$

(3) $\mathbf{a}^2=1$ equivale a $\mathbf{a}=1$ OR $\mathbf{a}=-1$ → $x-2=1$ **OR** $x-2=-1$ (4) applico "+2" → $x=3$ **OR** $x=1$



Indicata con F la funzione precedente, ossia posto $F(x) = (x-2)^2-1$, posso tracciare $y = 0.5(x-2)^2-0.5$ tenendo conto che questa nuova figura è il grafico di x → **0.5·F(x)**. In pratica − vedi figura **(2)** − le y vengono tutte moltiplicate per 0.5: il grafico è ottenibile da quello di F mediante una *trasformazione di scala* che mantiene intatte le ascisse e moltiplica per un fattore costante (0.5 in questo caso) le ordinate.

Il nuovo grafico è quindi deformato verticalmente; ad esempio il grafico di F arriva, in basso, fino alla ordinata −1; il grafico della nuova funzione si ferma all'ordinata −0.5. Tuttavia *interseca l'asse x negli stessi punti in cui lo interseca il grafico di F.*

Con metodi algebrici avrei proceduto così:

(1) cerco per quali x è vera l'eq. $0.5(x-2)^2-0.5=0$ (2) applico "+0.5" → $0.5(x-2)^2=0.5$

(3) applico "/0.5" → $(x-2)^2=1$ e avrei proseguito come nel caso precedente

Nel caso della figura di equazione $y = -(x-2)^2+1$ posso tener conto che, indicata con F sempre la stessa funzione, questa nuova figura è il grafico di x → **−F(x)**.

In pratica − vedi figura **(3)** − a tutte le y viene cambiato il segno: il grafico è ottenibile da quello di F mediante un ribaltamento attorno all'asse x. Il nuovo grafico si sviluppa, quindi, verso il basso mentre il grafico di F si sviluppa verso l'alto. Mentre il grafico di F arriva, in basso, fino alla ordinata −1, il grafico della nuova funzione arriva, in alto, fino all'ordinata 1. Tuttavia *interseca l'asse x negli stessi punti* in cui lo interseca il grafico di F.

Con metodi algebrici avrei potuto procedere ad es. così:

(1) cerco per quali x è vera l'eq. $-(x-2)^2+1=0$ (2) applico la **negazione** → $(x-2)^2-1=0$
e poi avrei proseguito come nel caso iniziale

4. *Risoluzione di equazioni: considerazioni generali*

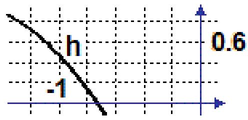
La modellizzazione mediante un'*equazione* di una certa situazione è, in genere, finalizzata a ottenere una rappresentazione quantitativa di come una grandezza varia al variare di un'altra o di altre. Questo era il caso del primo esempio del ➜ §2: esprimere la distanza tra le due navi in movimento in funzione del tempo, ovvero determinare la velocità con cui le due navi si allontanano. Nel caso del secondo esempio abbiamo espresso il volume V della scatola in funzione del taglio x. Il ➜ grafico di questa funzione ci permette di avere in un colpo d'occhio l'idea di come varia il volume, ci permette di stimare come operare il taglio in modo da ottenere il volume massimo o, ad esempio, da ottenere un volume di 300 cm³. In questo paragrafo ci occuperemo in particolare dei metodi per risolvere le equazioni rispetto a una variabile fissata. Alcuni aspetti verranno approfonditi nel paragrafo successivo.

A. Metodo grafico-numerico

È impiegabile quando: • si ha a che fare con un'equazione che coinvolge solo due variabili e che si è in grado di rappresentare graficamente ("a mano" o con l'ausilio di un opportuno programma), • si vuole trovare, fissato un valore di una delle due variabili, quale o quali valori assume l'altra variabile.

Riferendosi al caso, appena citato, della costruzione della scatola, fissato V = 300, possiamo risolvere graficamente l'equazione $(20-2x)^2 \cdot x = 300$ rispetto ad x e trovare come soluzioni 1 e 7 e poi, facendo degli zoom, 0.9 e 6.6. Il procedimento può essere automatizzato (come visto con uno script subito dopo il quesito 5). Si tratta, comunque, solo di ***approssimazioni*** delle soluzioni, *non delle soluzioni esatte.*

12 A lato è rappresentata graficamente l'equazione y = h(x) per una particolare funzione h. Deducine quali sono le soluzioni delle equazioni h(x)=0 e h(x)=0.6 scelte tra le seguenti:
-0.9, -0.73, -1.098, 1.1



B. Prima di mettersi a manipolare l'equazione …

… è bene cercare di capire se è effettivamente necessario fare manipolazioni o se è possibile risolvere l'equazione direttamente; nel caso si debba procedere con manipolazioni, è bene cercare di scegliere le trasformazioni più convenienti: non esiste un'unica ricetta per risolvere un'equazione! Ad esempio di fronte all'equazione:

6/x = 3 senza fare trasformazioni devi comprendere che l'unica soluzione è **2**: risolvere (rispetto a x) questa equazione vuol dire rispondere alla domanda «per quali numeri si può dividere 6 ottenendo 3?» e dovresti sapere che per ottenere 3 occorre che 6 sia diviso per 2;

7 w = 7 devi capire immediatamente che essa ha per soluzione w = **1**: l'unico numero che moltiplicato per 7 dà come risultato 7 è 1;

t^2+1 = 0 devi subito concludere che *non ci sono soluzioni:* qualunque sia t, $t^2 \ge 0$ e, quindi, $t^2+1 > 0$;

(a+1)/a = 1 devi subito concludere che *non ci sono soluzioni:* il rapporto tra numeri differenti non è mai 1;

x (x+1) = 0 senza sviluppare x(x+1) in x^2+x devi osservare che affinché il prodotto tra x e x+1 sia 0 occorre o che x sia 0 o che x+1 sia 0 (cioè x sia −1), per cui le soluzioni sono **0** e **−1**.

13 In quali dei seguenti casi potete dire a priori (senza manipolazioni, grafici, …) quante sono le soluzioni?
$\sqrt{x}/(\sqrt{x}+1) = 1.5$ $x^2/(x^2+1) = 1.5$ $x^3/(x^3+1) = 1.5$ $(x-1)^2+(x+3)^2 = 0$

C. È opportuno tener conto di eventuali restrizioni alla variazione della incognita …

In alcuni casi devo risolvere un'equazione rispetto a una variabile **v** che rappresenta una grandezza o una quantità che può variare non in tutto **R** ma solo in un suo sottoinsieme. Cioè devo trovare **v** per cui siano vere non solo l'equazione, ma anche altre *condizioni.* Ad esempio nel caso della scatola già richiamato all'inizio del paragrafo devo trovare x per cui siano vere sia l'equazione $(20-2x)^2 \cdot x = 300$ che la disequazione $0 < x < 10$.

Nel caso del problema «trova un numero naturale il cui quadrato aumentato di 1 sia 100» posso considerare la equazione $n^2 + 1 = 100$ assieme alla condizione n∈**N**. Senza questa condizione troverei la soluzione $\sqrt{99} = 9.9498\ldots$; con la condizione n∈**N** non ho invece soluzioni.

D. … ed esaminare il dominio dell'equazione

In altri casi può accadere che l'equazione non sia definita su tutto **R** in quanto per alcuni valori della variabile rispetto a cui si vuole risolvere l'equazione qualche sottotermine diventerebbe indefinito. In tali casi *l'esame preventivo del dominio può far risparmiare inutili manipolazioni:*

$\sqrt{(x-4)} = \sqrt{(2-x)}$ è definita se $x-4 \ge 0$ & $2-x \ge 0$, cioè se $x \ge 4$ & $2 \ge x$, ma le condizioni $x \ge 4$ e $2 \ge x$ sono contraddittorie; in altre parole il 1° termine dell'equazione è definito per $x \ge 4$, il 2° per $x \le 2$, e quindi l'equazione non è definita per alcun x. Non ha quindi senso cercare per quali x è vera.

14 Qual è il dominio dell'equazione $\sqrt{(-x)} = \sqrt{x}$? Qual è l'insieme delle sue soluzioni?

E. Possono esserci diverse quantità di soluzioni

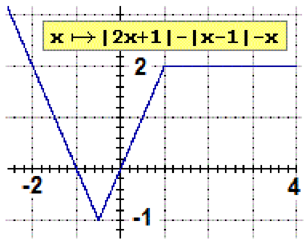
Per alcuni tipi di equazioni si può stabilire a priori quante sono le soluzioni. Ma non c'è un metodo generale per stabilirlo. La quantità delle soluzioni può variare da caso a caso:

$3(x+1)-1 = 3(x+1)+1$ equivale a $-1=1$, che è falsa; in questo caso ci sono **0** soluzioni: comunque sostituisca a x un numero ottengo un'equazione falsa. Invece di dire che l'equazione è falsa per ogni x si usa dire, più in breve, che è ***falsa*** (qualche libro dice che l'equazione è *impossibile* intendendo: "è impossibile risolvere l'equazione rispetto a x").

$3(x+1)-1 = 2(x+1)+x$ equivale a $3x+2 = 3x+2$, che è *vera per ogni x:* in questo caso ci sono infinite soluzioni; anzi, ***ogni*** numero è soluzione. Si dice anche, più in breve, che l'equazione è ***vera***. Le equazioni vere vengono chiamate anche ***identità***.

$|2x+1|-|x-1|-x = k$ risolta rispetto a x, può avere 0, 1, 2 o ***infinite*** soluzioni a seconda del valore di k: il grafico di $x \to |2x+1|-|x-1|-x$, riprodotto a lato, interseca la retta orizzontale y=k:

- 0 volte se $k < -1$
- 1 volta se $k = -1$ (la soluzione è $-1/2$)
- 2 volte se $-1 < k < 2$ (se k = 0 le soluzioni sono -1 e 0)
- infinite volte se k = 2 (l'insieme delle soluzioni è $[1,\infty) \cup \{-2\}$)
- 1 volta se $k > 2$



15 Di ciascuna delle equazioni seguenti stabilite quante soluzioni ha.
$2/x = 8/(4x)$ $2x^2/x = 2x$ **round**(x) = x (**round** indica l'arrotondamento agli interi]

F. Verifica

Dopo la risoluzione di un'equazione attraverso manipolazioni, è utile verificare se le soluzioni trovate sono effettivamente soluzioni, cioè se, sostituite alla variabile assunta come incognita, rendono vera l'equazione: nel corso delle manipolazioni potrebbero essersi verificati degli errori; ad es. se dopo la seguente risoluzione di equazione:

$$12+\frac{2}{x-4}=3x+\frac{2}{x-4} \xrightarrow[\text{applico } -\frac{2}{x-4}]{} 12+\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x-4}=3x+\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x-4} \xrightarrow[\text{semplifico}]{} 12=3x \xrightarrow[\text{applico /3 e inverto l'eq.}]{} x=4$$

verifico quanto ottenuto sostituendo 4 a x nell'equazione originale, ottengo:

$$12+\frac{2}{4-4}=3\cdot 4+\frac{2}{4-4} \to 12+\frac{2}{0}=12+\frac{2}{0}$$

che non è definita. L'errore che è stato commesso nel corso della manipolazione è discusso nel paragrafo 5.

G. Incognite, parametri, variabili di input e di output

Di fronte a equazioni contenenti più variabili, come le seguenti, si può scegliere in più modi l'incognita:

(1) $L = Fs$ **(2)** $Gt = (Ru-Ci)n-Cf$ **(3)** $x^2+y^2=1$ **(4)** $A=(B+b)h/2$

In questi casi risolvere l'equazione rispetto alla variabile assunta come incognita consiste nel trovare non valori numerici ma termini (che possono contenere tutte o alcune delle altre variabili) che sostituiti a tale variabile rendono l'equazione vera, cioè un'identità:

– nel caso (1) se prendo **s** come incognita ottengo la soluzione: $s = L/F$;
– nel caso (2) se prendo **Ru** come incognita ottengo la soluzione: $Ru = (Gt+Cf)/n+Ci$;
– nel caso (3) se prendo **y** come incognita ottengo le soluzioni: $y = \sqrt{(1-x^2)}$ e $y = -\sqrt{(1-x^2)}$.

16 Verifica se questi termini sono effettivamente soluzioni delle prime tre equazioni.

17 Risolvi (4) sia rispetto a **b** che rispetto a **B**.

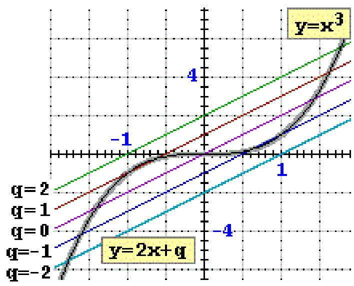
Quando si fissa una variabile come *incognita* le altre *variabili* che compiaono nell'equazione sono chiamate ***parametri***. Ad esempio nel caso di **L** = **F·s** se considero **s** come incognita, **L** e **F** sono i parametri. Analogamente nel caso di una funzione, come $G(x) = ax+b$, vengono chiamati ***parametri*** le variabili diverse dalla variabile di input che compaiono nel termine che descrive l'output. Nel caso di G i parametri sono *a* e *b*. In pratica i parametri sono delle variabili su cui ragiono, "temporaneamente", come se fossero delle *costanti*.

Nota. La parola ***parametro*** viene usata anche con un significato diverso. Ad esempio la *descrizione* di una semiretta con $P = (3,1) + t(4,5)$ ovvero con $x = 3+4t$ e $y = 1+5t$, come se fosse la traiettoria di un oggetto che si muove a partire dal punto (3,1) e ogni secondo avanza di 4 metri verso est e di 5 verso nord, viene chiamata *parametrica* e la variabile t (che rappresenterebbe il tempo) viene chiamata *parametro.*

Con il ***metodo grafico*** non posso risolvere una equazione con parametri, ma solo le particolari equazioni ottenibili da essa dando valori numerici ai parametri. Tuttavia, tracciare (quando è possibile) i grafici corrispondenti all'equazione per diversi valori dei parametri, può essere utile per studiare il numero delle soluzioni.

Ad es. di fronte a $\mathbf{x^3-2x-q=0}$, cioè a $x^3=2x+q$, osservando come al variare di q cambiano le intersezioni tra il grafico di $x \to x^3$ e quello di $x \to 2x+q$, grafici che è facile schizzare anche a mano (vedi la figura a lato), capisco che:
– c'è un valore *c* di poco superiore a 1 tale che per $q = c$ e $q = -c$ ci sono esattamente 2 soluzioni (la retta "tocca" $y=x^3$ in un punto e la attraversa in un altro);
– per $q > c$ c'è una sola soluzione; lo stesso accade per $q < -c$;
– per $-c < q < c$ ci sono 3 soluzioni.

Per trovare il valore esatto di *c* occorre ricorre a metodi algebrici, che per ora non siamo in grado di affrontare.



Nel caso delle equazioni contenenti *parametri* la ***verifica delle soluzioni*** è particolarmente importante: in presenza di parametri è spesso più difficile studiare il dominio dell'equazione. Consideriamo ad esempio l'equazione a lato, prendendo x come incognita.

$$\frac{k}{x+k}=\frac{x}{x+k}$$

- A denominatore in entrambi i membri abbiamo x+k. Quindi l'equazione è *definita* per $x \ne -k$.
- Moltiplico entrambi i membri per x+k e semplifico, ottenendo: **k = x**. La *soluzione* ***sarebbe*** quindi x=k.
- Facciamo la *verifica* sostituendo k a x
- L'equazione ottenuta è vera se $k \ne 0$.
- Concludendo se $k \ne 0$ l'equazione ha come soluzione x=k. Se k=0 l'equazione non ha soluzioni (in questo caso la soluzione x=k non verifica l'equazione).

$$\frac{k}{k+k}=\frac{k}{k+k}$$

Se fossimo stati attenti avremmo potuto concludere che per k=0 non vi sono soluzioni anche senza la verifica: all'inizio abbiamo detto che per x=–k l'equazione non è definita; per k=0 si ha k=–k e quindi in tal caso la soluzione x=k non è accettabile.

18 Risolvi $5/(x-a)+a = x+10/(2x-2a)$ prendendo x come incognita.

5. Manipolazione di equazioni - Funzioni iniettive

Per ***manipolare un'equazione*** si possono operare diversi tipi di trasformazioni. Uno, semplice, è lo ***scambio*** dei due membri: **a**=**b** → **b**=**a**. Ecco un esempio: 12=x+1 → 12–1=x → 11=x → x=11. Altre trasformazioni avvengono operando sui due membri dell'equazione; ne abbiamo incontrato molti esempi. Ci soffermiamo, qui, su alcune particolari attenzioni che occorre prestare in vari casi abbastanza comuni, su cui ritornerari anche nei prossimi anni.

Cambio del dominio

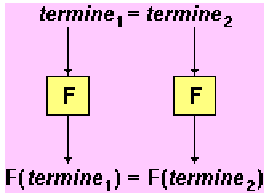
Nel trasformare i termini che compaiono in un'equazione occorre tener presente che *può* ***cambiare il dominio*** dell'equazione e che, quindi, si possono trovare delle *soluzioni* ***in più*** *o* ***in meno*** rispetto all'equazione originale.

- Nell'esempio già considerato discutendo della ➜ verifica delle soluzioni, 4 è soluzione di 12=3x ma non è nel dominio dell'equazione iniziale, che è stato allargato operando la "semplificazione" $2/(x-4) - 2/(x-4) \to 0$ Per procedere correttamente avrei dovuto aggiungere, dopo la semplificazione, la condizione $x \neq 4$, cioè considerare, invece della sola equazione, la condizione: *equazione* AND $x \neq 4$.
- Anche nell'esempio considerato discutendo della ➜ verifica nel caso delle equazioni parametriche, k è soluzione di k=x ma non è nel dominio dell'equazione iniziale, che, dopo l'applicazione di "$\cdot(x+k)$" ai due membri, è stato allargato operando la "semplificazione" $(x+k)/(x+k) \to 1$.

$\boxed{19}$ La risoluzione (rispetto ad x) di $\sqrt{(x^2)} = 2$, che equivale a $|x| = 2$, fornisce $x = 2$ **or** $x = -2$. Qual è l'errore di chi procede così: $\sqrt{(x^2)} = 2 \to x = 2$?

Caratteristiche della funzione applicata ai due membri

Se ***a*** è uguale a ***b*** e ***F*** è una funzione a input e output in **R** posso concludere che *F(a)* è uguale a *F(b)*. Questa è l'idea su cui si basa il procedimento di trasformazione delle equazioni utilizzato, ad es., nella seguente risoluzione (rispetto ad A), di:



(A − 2) / 5 = 1/4 applico $x \to x\cdot 5$ ottenendo:
A − 2 = 5/4 e poi $x \to x+2$ ottenendo:
A = 5/4 + 2 = 4.25

Se un certo valore verifica l'equazione iniziale (*a*=*b*) esso deve verificare anche l'equazione finale (*F(a)*=*F(b)*).

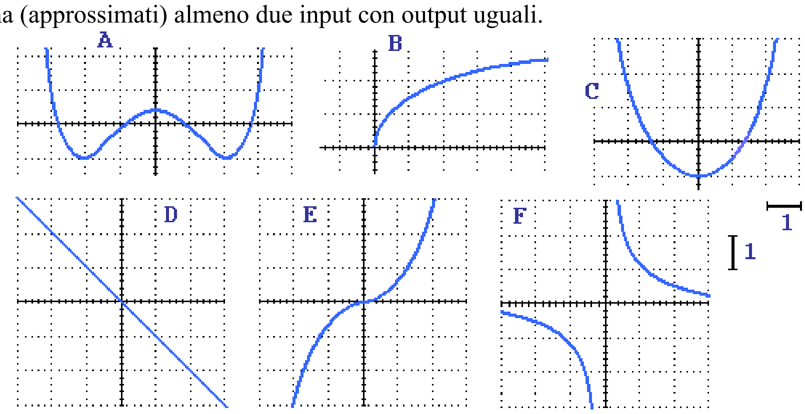
In alcuni casi, però, *si possono ottenere come soluzioni dei numeri che soluzioni non sono.* Un esempio:
$\sqrt{(2x+5)} = x+1 \;\to\; 2x+5 = (x+1)^2 \;\to\; 2x+5 = x^2+2x+1 \;\to\; 4 = x^2 \;\to\; x^2 = 4 \;\to\; x=2$ **or** $x = -2$.

Se faccio la verifica della soluzione 2 ottengo $\sqrt{9} = 3$, che è vera. Per la soluzione −2 ottengo $\sqrt{1} = -1$, che è falsa. Quindi −2 non è una soluzione.

$\boxed{20}$ Per capire in quale passaggio l'equazione è stata trasformata in un'equazione con una soluzione in più, individuate qual è la prima tra le equazioni man mano ottenute che è verificata da −2. Cercate, poi, di capire che cosa è all'origine del fenomeno.

Le funzioni che a input diversi fanno corrispondere output diversi vengono dette ***funzioni iniettive***.

$\boxed{21}$ Tra i grafici seguenti individua quelli corrispondenti a funzioni iniettive e quelli corrispondenti a funzioni non iniettive. Per queste ultime funzioni determina (approssimati) almeno due input con output uguali.



L'applicazione di funzioni non iniettive ai due membri di un'equazione può rendere uguali "cose" che non sono uguali. Ad esempio nel caso dell'equazione discussa prima del quesito 20 l'applicazione dell'elevamento al quadrato, come abbiamo visto, fa sì che i due membri dell'equazione diventino uguali anche nel caso in cui assumano valori opposti.

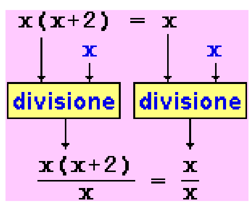
Invece, cambiando segno ai due membri dell'equazione ($x \to -x$), elevandoli al cubo ($x \to x^3$), applicando la radice quadrata ($x \to \sqrt{x}$) o il reciproco ($x \to 1/x$) non si possono aggiungere soluzioni indesiderate.

Applicando la radice quadrata o il reciproco si potrebbe invece – in casi molto particolari – perdere qualche soluzione in quanto queste funzioni non sono definite su tutto **R**: la prima non è definita sui numeri negativi (grafico B precedente), la seconda non è definita in 0 (grafico F).

Aggiunta di qualche termine

Abbiamo visto, ➜ all'inizio del paragrafo, esempi in cui si è ***applicata*** una stessa ***funzione*** a entrambi i membri dell'equazione e a un ***termine aggiuntivo*** *contenente variabili*, introdotto per poi effettuare delle semplificazioni; e abbiamo osservato che si possono aggiungere o perdere delle soluzioni. Vediamo un altro esempio.

$$x(x+2)=x \;\to\; \frac{x(x+2)}{x} = \frac{x}{x} \;\to\; x+2=1 \;\to\; x = -1$$



Nel primo passaggio si è applicato "/x", cioè la divisione per il termine x (vedi figura a lato); si è ottenuta una nuova equazione che ha un dominio più piccolo (non è definita per x = 0); la soluzione x = −1 è l'unica soluzione di questa equazione, ma l'equazione di partenza era verificata anche per x = 0. Per procedere correttamente devo tener conto che dividendo per x escludo 0 dal dominio e, quindi, devo *controllare se 0 è una soluzione* da aggiungere alle altre eventuali soluzioni.

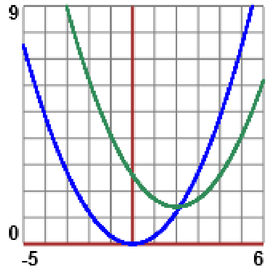
6. Esercizi

`e1` *Traccia* su carta quadrettata il grafico della funzione $x \to 2x^2$ e la figura ottenuta da questo mediante la traslazione $\Delta x = 1$, $\Delta y = -2.5$. Di quale funzione è il grafico questa nuova figura?

`e2` *Traccia* su carta quadrettata il grafico della funzione $x \to x/2$ e le figure ottenuta da questo mediante le traslazioni (a) $\Delta x = -1$, $\Delta y = -0$; (b) $\Delta x = 0$, $\Delta y = 2.5$; (c) $\Delta x = -1$, $\Delta y = 2.5$. Di quali funzioni sono grafici queste nuove figure?

`e3` Per schizzare il grafico di $x \to (x+3)/(x+2)$ si può trasformare il termine a numeratore in $(x+2)+1$ e procedere in modo da ricondursi ad una funzione simile a quella considerata nella figura (C) di §3. Prova a farlo.

`e4` A fianco sono riprodotti parzialmente i grafici di $F: x \to 0.3x^2$ e di $G: x \to 0.3x^2-1.2x+2.6$. Si tratta di due parabole, una avente come vertice (0,0), l'altra ottenuta da questa mediante una traslazione. Trova i passi h,k della traslazione, cioè h e k tali che $F(x-h)+k$ sia uguale a $G(x)$. Controlla i valori di h e k determinando graficamente i vertici della parabola che è grafico di G.
Traccia. Riscrivi $F(x-h)+k$, cioè $0.3(x-h)^2+k$, sviluppando $(x-h)^2$ mediante: $(a+b)^2 \to a^2+2ab+b^2$. Ottieni un'espressione del tipo $0.3x^2+\ldots x+\ldots$. Imponendo che il primo "…" sia uguale a -1.2 trova il valore di h. Poi, imponendo che il secondo "…" sia uguale a 2.6 trova il valore di k.



`e5` Ho due vini A e B analoghi, ma con diverse gradazioni (cioè con diverse percentuali di alcool): A di 10.8 gradi (10.8% di alcool), B di 11.3 gradi. Per ottenere 10 litri a 11.0 gradi quanto devo prendere dei due vini? Indico con x la quantità di litri che dovrò prendere di A. La quantità di B da prendere è $10-x$. L'alcool che è in A è 10.8% x, cioè $0.108 \cdot x$; quello in B è $0.113 \cdot (10-x)$; in tutto l'alcool deve essere $0.11 \cdot 10$. Traduci queste informazioni in un'equazione, risolvila rispetto a x e rispondi al quesito.

`e6` Traccia un grafico che possa essere considerato quello di una funzione F tale che $0 \le x \le 5$ **and** $F(x)=0$ abbia 2 soluzioni. Analoghi esercizi, ma con le richieste che le soluzioni siano 0, siano 3, siano infinite.

`e7` Inventa delle equazioni che abbiano 0, 1, 2, 3 e infinite soluzioni.

`e8` Considera la funzione V studiata in §2. V è una funzione iniettiva di x?

`e9` Traccia il grafico (dopo una tabulazione) della funzione $x \to |2x|+|x-3|$. Trova, se possibile, valori da attribuire a P affinché l'equazione $|2x|+|x-3| = P$ abbia 0, 1, 2 soluzioni.

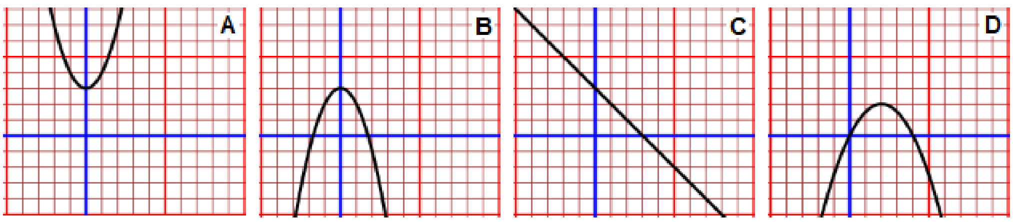
`e10` Schizza il grafico di $x \to \mathbf{a}x^2$ per diversi valori di **a** (anche con segno diverso). Al variare del valore di **a** cambia la quantità delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a}x^2 = -3$? Come?

`e11` Individua l'errore nella seguente "dimostrazione" che ogni numero è uguale a 1 (nella descrizione dei passaggi non sono state elencate le applicazioni dei riordini di addizioni e moltiplicazioni).

Sia x un qualunque numero.

(1)	$x^2-2x+1=1-2x+x^2$	questa è un'equazione vera
(2)	$(x-1)^2=(1-x)^2$	da (1) usando: $\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2 \to (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$
(3)	$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{(1-x)^2}$	da (2) applicando la radice quadrata
(4)	$x-1=1-x$	da (3) usando: $\sqrt{\mathbf{a}^2} \to \mathbf{a}$
(5)	$2x-1=1$	da (4) applicando "+x" e usando $-\mathbf{a}+\mathbf{a} \to 0$
(6)	$2x=2$	da (5) applicando "+1"
(7)	$x=1$	da (6) applicando "/2"

`e12` Impiegando lo script **parabole** traccia le figure seguenti e scrivi quali sono le funzioni di cui esse sono i grafici.



1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
coppia ordinata (§1), *funzione* (§1), *insieme immagine* (§1), *grafico di* $x \to F(x-h)+k$ (§3), *grafico di* $x \to a \cdot F(x)$ (§3), *grafico di* $x \to -F(x)$ (§3), *parametro* (§4), *funzione iniettiva* (§5)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").