Le funzioni esponenziale e logaritmo

1. Richiami

Nelle schede per la classe terza abbiamo già incontrato più volte la funzione esponenziale, ed abbiamo accennato alla sua funzione inversa. Lo abbiamo fatto in modo molto veloce, in parti spesso "facoltative", parlando della derivazione di funzioni, degli integrali e del teorema limite centrale. In questa scheda riprenderemo e approfondiremo lo studio di queste importantissime funzioni.

2. La crescita esponenziale

Suppongo che sia possibile organizzare l'*allevamento* di una certa specie di animali in modo tale che ogni anno il numero dei capi aumenti circa della metà, cioè venga moltiplicato per 1.5. Voglio studiare come aumenterebbe il numero dei capi al passare del tempo, escludendo che vengano venduti o eliminati capi. Se indico con **P(*n*)** il numero per cui si è moltiplicata la popolazione iniziale dopo *n* anni, ossia se P(*n*) è la popolazione misurata prendendo come unità la popolazione iniziale, possiamo descrivere la situazione così:

P(0) = 1, P(*n*+1) = P(*n*) · 1.5. Quindi:

P(1) = 1·1.5 = 1.5, P(2) = 1.5·1.5 = 2.25, P(3) = 2.25·1.5 = 3.375, **....** Ad esempio dopo 20 anni la popolazione arriverebbe ad essere più di 3000 volte quella iniziale, come si può verificare facendo i conti con una calcolatrice o con lo script **ricorsione** (per i calcoli con la grande CT vedi):

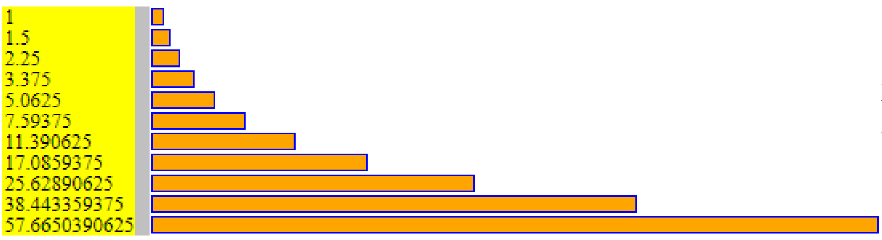
a(n) if I know initial conditions and recurrence function F

```
P=1
for(i=0; i<n; i++) {P=1.5*P}
```

```
3325.256730079651  if n=20
7.59375  if n=5
5.0625  if n=4
3.375  if n=3
2.25  if n=2
1.5  if n=1
1  if n=0
```

Introduce *n* and click

n 20 click



P(n+1) = P(n)*1.5   P(0), P(1), ..., P(10)

Posso poi rappresentare graficamente questa successione con lo script **sequenze**

Si vede che all'aumentare di *n* P(*n*) cresce in maniera esplosiva. Si dice che P(*n*) ha una ***crescita esponenziale***, in quanto, come è facile capire pensando alla definizione di *potenza*, P(*n*) può essere espresso come: **P(*n*) = 1.5^n** (ossia mediante il calcolo di una potenza che ha l'input come *esponente*).

Poiché ad ogni anno la popolazione cresce di una quantità pari al 50% della popolazione dell'anno precedente, la ***velocità con cui la popolazione varia*** annualmente è ***proporzionale alla popolazione stessa***.

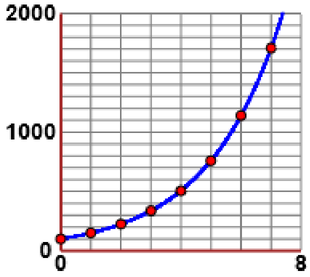
1 Considera un allevamento nel quale il numero dei capi aumenti ogni anno del 30%. Se inizialmente i polli sono 1000, in 10 anni il loro numero cresce in questo modo (come posso calcolare facilmente anche con la **grande CT**): 1000, 1300, 1690, 2197, 2856, 3713, 4827, 6275, 8157, 10604, 13786. Rappresenta graficamente questa **sequenza**. Si tratta di una crescita esponenziale?

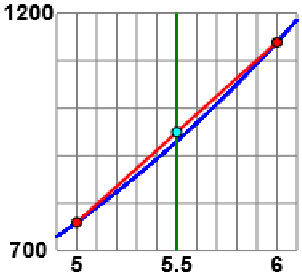
2 Supponiamo che un tessuto tumorale impieghi circa 15 giorni per aumentare del 100% la propria quantità di cellule e che cominci a dare i primi sintomi clinici quando raggiunge i 500 milioni di cellule. Se al momento attuale il tessuto è costituito da 1 milione di cellule, quanto tempo trascorre, approssimativamente, prima che il tumore incominci a manifestare la sua presenza? [per rispondere puoi usare **semplíciEq** risolvendo l'equazione 2^x=500 …]

Una situazione analoga è quella della crescita di un *deposito in una banca.* Per evidenziare l'analogia con l'esempio precedente supponiamo che la banca applichi un interesse del 50% annuo (nella realtà le banche applicano tassi estremamente più piccoli, per cui non si osserva la crescita "esplosiva" che invece evidenzia il grafico seguente). Supponiamo che il deposito iniziale sia di 100 € e che non vengano nel frattempo fatti altri versamenti (e non vengano fatti prelevamenti). Se esprimiamo il tempo **t** in anni, il deposito in euro **D(t)** dopo **t** anni è descrivibile come:

$$\mathbf{D(0) = 100,\ \ D(t+1) = D(t) \cdot (1 + 50/100) = D(t) \cdot 1.5} \quad \text{ovvero:} \quad \mathbf{D(t) = 100 \cdot 1.5^t}$$

Mentre sopra aveva senso valutare la popolazione dell'allevamento solo di anno in anno (e rappresentarla con una specie diistogramma), qui ha senso considerare anche tempi **t** non interi: una persona può ritirare i soldi anche in momenti diversi dalla fine dell'anno. Vedi il grafico sottostante a sinistra, che ha ora l'aspetto di una curva continua, realizzato con lo script **banca**. Nello script la funzione è rappresentata da `y = 100*Math.pow(1.5,x)`, dove `Math.pow(a,b)` rappresenta a^b.





Ma in realtà il valore del deposito, per facilitare i calcoli, è effettuato usando la formula $D(t) = 100 \cdot 1.5^t$ solo per i valori interi. Ad esempio per determinare il valore dopo un tempo tra 5 e 6 anni (ad esempio dopo 5 anni e mezzo, ossia 5.5 anni) si calcolano i valori del deposito dopo 5 e 6 anni con $100 \cdot 1.5^5$ e $100 \cdot 1.5^6$ e si calcolano quelli intermedi facendo variare il deposito proporzionalmente al tempo.

In altre parole, invece del grafico di $t \to 100 \cdot 1.5^t$ si considera quello che si ottiene da esso congiungendo i punti ad ascissa intera con dei segmenti. Vedi il grafico soprastante a destra, realizzato con lo script **banca2**, in cui il pallino celeste rappresenta il valore del deposito dopo 5.5 anni.

Questo è dunque un caso in cui l'andamento è "esponenziale" restringendo il dominio a input **t** interi, ed è "lineare" in ciascun intervallo tra un input intero e il successivo.

$\boxed{3}$ Il deposito in banca dopo 5 anni e mezzo, calcolato con la **grande CT** usando direttamente la formula, sarebbe $100 \cdot 1.5^{5.5}$ = 930.0406367129879 = (arrotondando ai centesimi) 930.04. Qual è, invece, il valore corretto?

3. Un altro esempio

L'esempio iniziale dell'allevamento era poco realistico, ma facile per introdurre l'argomento. Vi sono situazioni in cui le popolazioni hanno effettivamente un andamento esponenziale. È il caso di vari tipi di *microrganismi unicellulari che si riproducono per scissione*: quando la cellula raggiunge una certa dimensione si scinde in due. In particolari condizioni ambientali all'interno di una popolazione di una di queste specie di microrganismi il tempo medio di vita di una cellula (ossia il tempo medio che passa dalla scissione di una cellula a quello di una cellula da essa generata) è pressocché costante. In alcuni microrganismi esso può essere di pochi minuti, in altri può essere di qualche giorno.

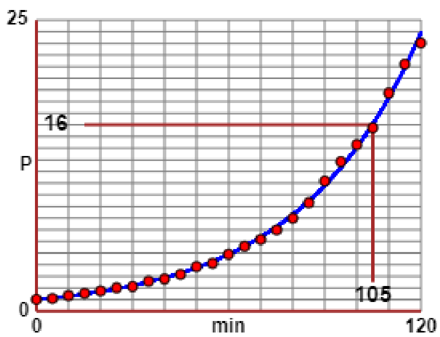
In queste condizioni esiste un intervallo di tempo **T** (*tempo di duplicazione*) tale che, passando da un qualunque istante **t** all'istante **t+T**, la popolazione raddoppi: infatti gli organismi non si scindono tutti esattamente nello stesso tempo, cosicché nel complesso di una popolazione di svariati milioni di individui si ha un ininterrotto duplicarsi di cellule che dà luogo a una crescita della popolazione praticamente continua e regolare, con velocità di variazione proporzionale alla popolazione stessa.

Se iniziamo a misurare la popolazione a partire da un certo istante **t**=0 e indichiamo con **P(t)** il numero per cui si è moltiplicata dopo il tempo **t**, ossia se P(t) è la popolazione misurata prendendo come unità la popolazione iniziale, possiamo descrivere la situazione così:

$$\mathbf{P(0) = 1,\ \ P(t+T) = P(t) \cdot 2}, \ \text{o:}\ \ \mathbf{P(t) = 2^n} \ \text{ se } \mathbf{n} \text{ è il numero delle duplicazioni avvenute nel tempo } \mathbf{t}.$$

Tenendo conto che **n** lo si ottiene dividendo **t** per il tempo di duplicazione T, abbiamo anche:

$$P(\mathbf{t}) = \mathbf{2}^{\mathbf{t\,/\,T}}.$$



In questo caso la formula è praticamente applicabile per ogni **t**, per cui, se da un rilevamento sperimentale ogni 5 minuti otteniamo i valori di P rappresentati graficamente qui a destra, ha senso cercare di approssimare tali punti con una curva, come è fatto sullo stesso grafico.

Ricaviamo che la popolazione si moltiplica per 16 in 105 minuti; $16 = 2^4$; quindi 4T = 105 minuti. Questi microrganismi duplicano la loro popolazione in 105/4 = 26.25 minuti, ossia in 26'15"

Poiché $2^{t\,/\,26.25} = (2^{1/26.25})^t$ e $2^{1/26.25} = 1.0268$, possiamo descrivere il fenomeno anche con la formula:

$$\mathbf{P(t)} = 1.0268^{\,\mathbf{t}}.$$

Puoi vedere lo script **micro** che realizza l'immagine precedente. Nel prossimo paragrafo vedremo come calcolare la velocità di variazione all'istante t di fenomeni descritti mediante funzioni del tipo $\mathbf{t \to a^{\,t}}$.

$\boxed{4}$ Una popolazione di batteri raddoppia in un quarto d'ora. Posso scrivere $P(t) = 2^{t/15}$ per indicare, approssimativamente, il fattore per cui viene moltiplicata la popolazione iniziale dopo **t** minuti. Infatti se t = 15 P(t) = 2.
Se, come nell'esempio precedente, voglio esprimere P(t) come $\mathbf{a^t}$, quale valore devo dare ad **a**?

4. *Le funzioni esponenziali e la loro derivazione*

Nel §7 della scheda sulla derivazione di funzioni abbiamo visto come si definisce 2^x per x irrazionale.

Per rinfrescare la memoria, vediamo come si calcola 2^z quando z = 1.01001000100001… (che è irrazionale in quanto non è periodico):

2^1	≤ 2^z ≤	2^2
2		***4***
2^1.01	≤ 2^z ≤	2^1.02
2.013911		***2.027919***
2^1.01001	≤ 2^z ≤	2^1.01002
2.013925060925787…		***2.013939019042974…***

Fermandomi qui posso concludere che 2^z è arrotondabile con 2.0139. Proseguendo posso arrotondare il valore con quante cifre voglio (2.0139250609257870 6…). Ricordiamo che in modo simile si posso definire le altre operazioni tra numeri reali.

Nella stessa scheda abbiamo richiamato il significato delle funzioni ***esponenziali***, ossia del tipo F: **x** → $\mathbf{a}^\mathbf{x}$ con la *base* **a** *positiva* (se no non potrebbero essere definite su tutto **R**) e *diversa da 1* (se no si tratterebbe della funzione costante x → 1). Abbiamo visto (e rivisto anche all'inizio del §2 della presente scheda) che esse esprimono fenomeni in cui una grandezza F(x) cambia con una velocità di variazione proporzionale a F(x) stessa. Ci aspettiamo, quindi, che la derivata F'(x) sia del tipo k·F(x). Verifichiamo la cosa ricorrendo alla definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h-1}{h}=a^x\,\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\left(\frac{d\,a^x}{dx}\right)_{x=0}$$

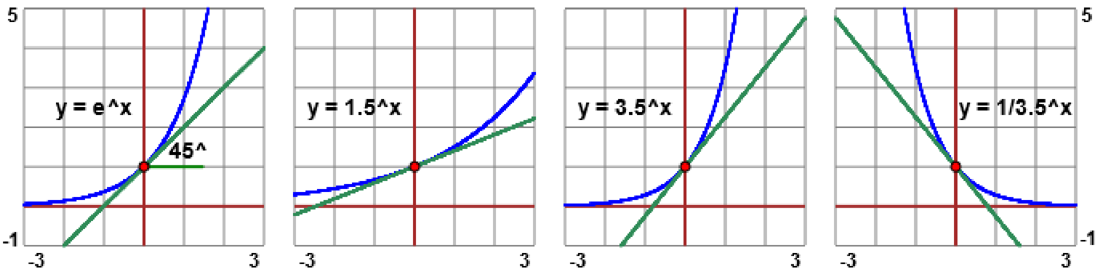
Dunque ho proprio che $D_x(a^x) = k\cdot a^x$ dove k è la derivata in 0.

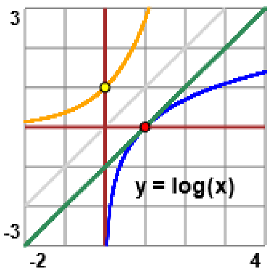
Tra tutte le funzioni esponenziali, ha una particolare importanza quella per cui tale k (cioè la derivata in 0) è 1, ossia che ha come derivata sé stessa. Il valore della base per cui ciò accade viene indicato con ***e***, numero che viene chiamato ***numero di Nepero***. La animazione a cui si accede cliccando **qui** dà un'idea di come si può determinare ***e***, e trovare che: ***e* = 2.71828182845904**… (si tratta di un numero irrazionale).

Dunque x → $\mathbf{e}^\mathbf{x}$ è la funzione esponenziale il cui grafico nel punto (0,1) ha pendenza 1.

y = $\mathbf{a}^\mathbf{x}$ con **a** > **e** ha tangente in (0,1) con pendenza maggiore di 1; se 1 < **a** < **e** la pendenza è positiva e minore di 1; se 0 < **a** < 1 la pendenza è negativa.

y = $\mathbf{h}^\mathbf{x}$ e y = $(\mathbf{1/h})^\mathbf{x}$, in quanto $h^{-x} = 1/(h^x) = (1/h)^x$, hanno grafici tra loro simmetrici rispetto all'asse y.





Dunque $\mathbf{D_x(e^x) = e^x}$. Questa particolare funzione esponenziale, usatissima in matematica e nelle sue applicazioni, viene spesso scritta "a 1 piano" usando, come abbiamo già visto, il simbolo **exp**, ossia scrivendo *exp(x)* al posto di e^x.

Come abbiamo già accennato, la funzione inversa di **exp** è chiamata ***logaritmo*** ed è indicata **log**. Il suo grafico è simmetrico a quello di **exp** rispetto alla retta y=x.

Sappiamo che $\mathbf{D_x(a^x) = k\cdot a^x}$. Quanto vale **k**?

Quando **a** = **e**, **k** = 1 e, in generale, come già accennato, **k** = **log(a)**. Giustifichiamo la cosa.

Evitiamo di fare un dimostrazione formale. Limitiamoci a verificare la cosa sperimentalmente. Potremmo usare la calcolatrice, ma facciamo prima usando lo script **Da^x**. Facciamolo nel caso di **y = 1.5^x**, trovando la derivata in 0, ma potremmo farlo per qualsiasi altra funzione esponenziale e per altri "x".

a [1.5] x [0] [F(x)]

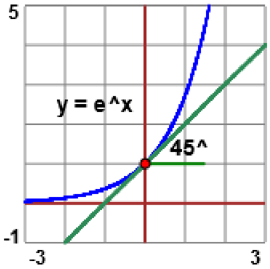
x1 [-1e-7] x2 [1e-7] [(F(x2)-F(x1)) / (x2-x1)]

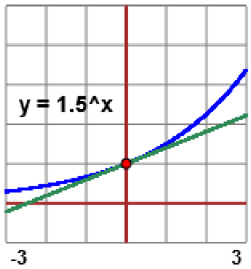
```
x1 = -1e-7, x2 = 1e-7          -> DF/Dx = 0.4054651087104233
x1 = -0.000001, x2 = 0.000001  -> DF/Dx = 0.40546510809980063
x1 = -0.00001, x2 = 0.00001    -> DF/Dx = 0.4054651081109028
x1 = -0.0001, x2 = 0.0001      -> DF/Dx = 0.4054651082197047
x1 = -0.001, x2 = 0.001        -> DF/Dx = 0.4054651192180181
x1 = -0.01, x2 = 0.01          -> DF/Dx = 0.40546621909667846
x1 = -0.1, x2 = 0.1            -> DF/Dx = 0.40557621600096294
x = 0                          -> F(x) = 1
```

Potremmo usare anche la nostra grande CT (vedi):

```
( pow(1.5,0+1e-4)-pow(1.5,0-1e-4) ) / (1e-4*2) = 0.4054651082197047
( pow(1.5,0+1e-5)-pow(1.5,0-1e-5) ) / (1e-5*2) = 0.4054651081109028
( pow(1.5,0+1e-6)-pow(1.5,0-1e-6) ) / (1e-6*2) = 0.40546510809980063
( pow(1.5,0+1e-7)-pow(1.5,0-1e-7) ) / (1e-7*2) = 0.4054651087104233
```

Ad un certo punto diventano preponderanti gli errori di arrotondamento. Possiamo prendere l'approssimazione 0.4054651081. Controlliamo: log(1.5) = 0.4054651081081644. **OK**.





In altre parole il grafico di 1.5^x è il grafico di $\mathbf{e}^x$ con la pendenza moltiplicata per 0.40546…

Se stringessi il grafico di 1.5^x passando da 1 a 0.40546… otterrei quello di $\mathbf{e}^x$.

In defintiva, $1.5^x = \mathbf{e}^{0.40546\ldots\cdot x}$

In generale, $\mathbf{a^x = e^{\log(a)\cdot x} = \exp(\log(a)\cdot x)}$.

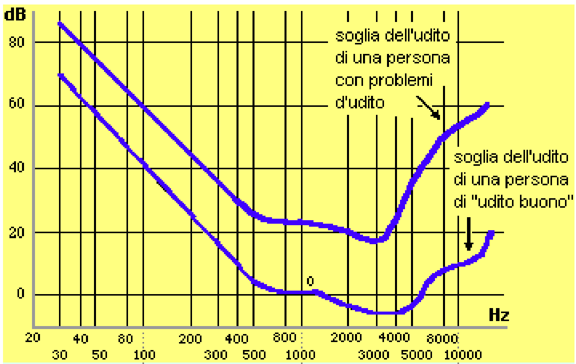
$\boxed{5}$ Calcola la pendenza della tangente al grafico di x → $\mathbf{a}^x$ per **a** = 3.5 nel punto (0,1), sia con lo script che con i calcoli, e controlla sulla prima figura del paragrafo il risultato che ottieni. Fai lo stesso per **a** = 1/3.5 = 0.2857142857142857 (arrotondamento).

5. I logaritmi: un esempio

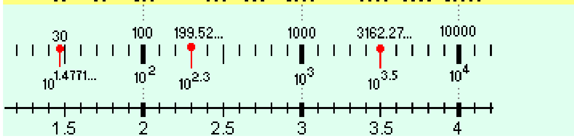
Quando dico che l'*ordine di grandezza* di 1000 è **3** o che quello di 96 mila è **4**, e quasi **5**, intendo dire nel primo caso che si tratta di $10^{\mathbf{3}}$, nel secondo caso di un numero compreso tra $10^{\mathbf{4}}$ e $10^{\mathbf{5}}$, e molto vicino a $10^{\mathbf{5}}$.

Il concetto di ordine di grandezza facilita la descrizione sia dei valori molto grandi (milioni, miliardi, …) che di quelli molto piccoli (milionesimi, miliardesimi) e, come vedremo, la loro rappresentazione grafica. Consideriamo, ad esempio, il diagramma seguente e la sua didascalia.

L'orecchio di una persona di udito buono rileva solo i suoni con frequenza compresa tra, circa, 20 Hz e 20000 Hz: il timpano non è in grado di vibrare a una frequenza che stia fuori da questo intervallo e, quindi, l'orecchio non può trasformare un suono con una frequenza di questo tipo in impulsi nervosi da inviare al cervello.
I grafici a lato riportano, per due categorie di persone, come al variare della frequenza (in Hz) dei suoni cambia il volume minimo (in dB, ***decibel***: unità di misura per l'intensità, o volume, del suono) a cui si riesce a percepirli.
I suoni meglio percepiti sono quelli attorno ai 3000 Hz.



Per visualizzare meglio l'andamento è stata scelta una scala orizzontale "sproporzionata", realizzata nel modo raffigurato a destra:



i valori delle frequenze sono stati segnati in corrispondenza dei loro ordini di grandezza rappresentati su una usuale scala proporzionata; ad es. 100 sulla scala dei grafici corrisponde alla tacca 2 degli ordini di grandezza in quanto 10^2=100, 1000 corrisponde alla tacca 3 in quanto 10^3=1000; 30 è stato segnato in corrispondenza di 1.4771… in quanto $10^{1.4771\ldots}$=30.

Nel fare ciò ho esteso il concetto di ordine di grandezza passando dalle potenze ad esponente intero a quelle ad esponente reale. Potrei dire che l'ordine di grandezza di 30 è 1.4771…, ma, come so, si preferisce dire che è 1. Si dice, invece, che 1.4771… è il ***logaritmo decimale*** di 30; simbolicamente si scrive: 1.4771… = ***Log***(30). In pratica il *logaritmo decimale* è un'estensione del concetto di ordine di grandezza.

In modo sintetico posso dire che la funzione ***Log*** è la *funzione inversa* di $\mathbf{x \to 10^x}$: h è il logaritmo decimale di k se $10^h = k$. Si usa *Log* riservando il simbolo *log*, come visto alla fine del paragrafo precedente, alla funzione inversa di *exp*. Invece di *Log* si usa anche log_{10}.

La scala per le frequenze usata nel diagramma precedente viene chiamata ***scala logaritmica*** in quanto i valori sono rappresentati a distanze proporzionali non ai valori stessi ma ai loro logaritmi decimali. Si tratta di una scala che si usa quando si vogliono rappresentare assieme valori con ordini di grandezza molto diversi: in una usuale scala come avremmo potuto rappresentare assieme 30, 50, 80 e 5000? non saremmo stati in grado di differenziare i primi tre valori, che si sarebbero ammucchiati in uno stesso punto dell'asse.

$\boxed{6}$ Calcola, usando la grande CT, Log(30).

6. I logaritmi: la loro derivazione

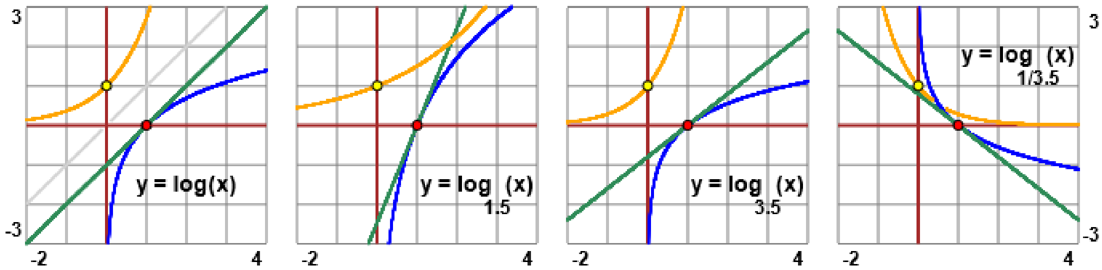
Nei punti precedenti abbiamo introdotto due esempi di *funzioni logaritmiche*, ossia di funzioni *inverse* di funzioni *esponenziali:*

- la funzione *log*, inversa di x → e^x, detta ***logaritmo naturale*** e indicata anche col simbolo *ln*,
- la funzione *Log*, inversa di x → 10^x, detta ***logaritmo decimale***.

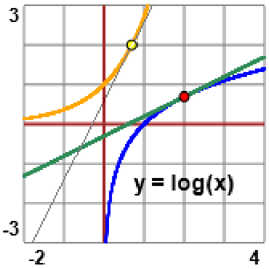
Più in generale per ogni numero positivo ***a*** diverso da 1, si chiama ***logaritmo in base a*** e si indica $\boldsymbol{log_a}$, la funzione inversa di x → a^x. In particolare abbiamo che $Log = log_{10}$ e che $log = log_e$.

Ovviamente, avendo **exp** immagine positiva, il domino di **log** è (0,∞).

Ecco i grafici delle funzioni logaritmiche che sono le inverse delle funzioni esponenziali rappresentate graficamente ➡ nel §4. Come si vede, i loro grafici sono simmetrici ai precedenti rispetto alla bisettrice del primo quadrante. I grafici delle esponenziali erano ottenibili da quello di **exp** mediante dilatazioni orizzontali di fattore log(a), quelli delle logaritmiche sono ottenibili da quello di **log** mediante dilatazioni verticali di fattore log(a).



Qual è la derivata di **log** in 1? È la pendenza alla tangente alla curva nel punto di ascissa 1. Questo è il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° quadrante del punto di ordinata 1 del grafico di **exp**, che ha ascissa 0; qui la tangente a tale grafico ha pendenza 1. Quindi $\mathbf{D_{x=1}\ (\log(x)) = 1}$.



Qual è la derivata di **log** in 2, ossia la pendenza alla tangente alla curva nel punto di ascissa 2. Questo è il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° quadrante del punto di ordinata 2 del grafico di **exp**, che ha ascissa log(2); qui la tangente a tale grafico ha pendenza $D_{x=\log(2)}(\exp(x)) = \exp(\log(2)) = 2$. Dunque la derivata di **log** in 2 è il reciproco di questo numero: $\mathbf{D_{x=2}\ (\log(x)) = 1/2}$.

In generale, mentre $\mathbf{D_x(e^x) = e^x}$, abbiamo che $\mathbf{D_x(\log(x)) = 1/x}$.

Analogamente, mentre $\mathbf{D_x(a^x) = \log(a) \cdot a^x}$, possiamo trovare che $\mathbf{D_x(\log_a(x)) = 1/(\log(a) \cdot x)}$.

Calcoliamo ad esempio $\mathbf{D_{x=1}\ (\log_{1/3.5}(x))}$. Ho: $\mathbf{1/(\log(1/3.5) \cdot 1)} = -0.7982356\ldots$

Nota. La funzione $x \to x^x$ non possiamo derivarla con le regole precedenti in quanto x compare sia nella base che nell'esponente. Vedremo nel §9 come derivare questa funzione.

7 Risolvi le equazioni che seguono. A volte la soluzione si vede senza bisogno di manipolazioni strane: basta riflettere sul quello che l'equazione significa. A volte ti conviene usare la calcolatrice per cercare di avvicinarti il più possibile alla soluzione. Altre volte si vede che non c'è alcuna soluzione.

$2^x = 16$, $\log_2(x) = 3$, $3^x = -2$, $\log_x(81) = 4$, $5^2 = x$, $4^x = 20$, $\log_5(31) = x$,

$x^3 = 10$, $\log_5(x) = 2$, $\log_x(5) = 2$, $\log_x(-5) = 2$, $\log_2(x) = 2.5$

8 Trova le equazioni delle rette tangenti a $y = 0.5^x$ nel punto di ascissa -2 e a $y = \log_{0.5}(x)$ nel punto di ascissa 3.

7. Altre proprietà delle funzioni esponenziali e logaritmiche

Ricordando i grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche visti in §4 e in §6 si ha facilmente che, se **a > 1**:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty \quad \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = -\infty \quad \text{e:}$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \lim_{x\to -\infty} a^x = 0$$

E se 0 < **a < 1**:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to -\infty} a^x = \infty$$

Dalle proprietà delle *potenze* discendono particolari proprietà dei logaritmi. In particolare:

• dal fatto che $\mathbf{a}^{b+c} = \mathbf{a}^b \cdot \mathbf{a}^c$, ossia che $x \to \mathbf{a}^x$ trasforma la somma di due input nel prodotto degli output, segue che la funzione inversa trasforma, inversamente, il prodotto degli input nella somma degli output:

$$\mathbf{\log_a(p \cdot q) = \log_a(p) + \log_a(q)}$$

Ad esempio il ragionamento con cui si trasforma $1000 \cdot 100$ è in 10^{2+3} può essere interpretato così: "a che cosa devo elevare 10 per ottenere $1000 \cdot 100$? alla somma degli esponenti a cui lo elevo per ottenere 1000 e 100", ossia: $\mathrm{Log}(1000 \cdot 100) = \mathrm{Log}(1000)+\mathrm{Log}(100)$.

• dal fatto che $\mathbf{a}^{-b} = 1/\mathbf{a}^b$, ossia che $x \to \mathbf{a}^x$ trasforma l'opposto di un input nel reciproco dell'output, segue che la funzione inversa trasforma, inversamente, il reciproco di un input nell'opposto dell'output:

$$\mathbf{\log_a(1/q) = -\log_a(q)}$$

Ad esempio: "a che cosa devo elevare 10 per ottenere 1/1000? all'opposto del numero a cui lo elevo per ottenere 1000", ossia: $\mathrm{Log}(1/1000) = -\mathrm{Log}(1000) = -3$.

• dal fatto che $\mathbf{a}^{b-c} = \mathbf{a}^b/\mathbf{a}^c$, ossia che $x \to \mathbf{a}^x$ trasforma la differenza di due input nel rapporto degli output, segue che la funzione inversa trasforma, inversamente, il rapporto degli input nella differenza degli output:

$$\mathbf{\log_a(p / q) = \log_a(p) - \log_a(q)}$$

• Che cosa posso dire di $\log_a(p^3)$?

Usando la prima formula riportata in questo punto abbiamo: $\log_a(p^3) = \log_a(p \cdot p \cdot p) = \log_a(p) + \log_a(p) + \log_a(p) = 3 \cdot \log_a(p)$. In generale si ha:

$$\log_a(p^q) = q \cdot \log_a(p)$$

anche se q non è intero; questa formula corrisponde alla proprietà delle potenze $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$.

Nota. A volte si usa *log x* al posto di *log(x)*. Per questa "notazione abbreviata" valgono considerazioni critiche e attenzioni da prestare simili a quelle per le analoghe notazioni usate con *sin, cos, tan.* Ad esempio *log* 3 + 5 è chiaramente equivalente a log(3)+5, ma log(3x)², che dovrebbe essere interpretato come log(3x)·log(3x), rispettando le regole base per l'interpretazione delle espressioni matematiche (analogamente a k², che viene interpretato come k·k), da alcuni, stranamente, viene interpretato come log((3x)²). Tutto il software interpreta, invece, correttamente log(3*x)^2 come fosse log(3*x)*log(3*x), mentre per log((3x)²) occorre battere log((3*x)^2).

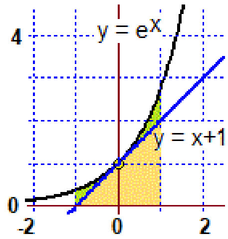
Nota storica. Il termine "logaritmo" fu introdotto da **Nepero** (John Napier, 1550-1617, lo stesso a cui è stato dedicato il numero ***e***). Il nome deriva dalle parole greche "arithmos" ("numero") e "logos", che, tra i vari significati, aveva anche quelli di "rapporto" (e "ragione", come il latino "ratio") e di "calcolo". Probabilmente è stato usato questo nome in quanto i logaritmi consentono di trasformare i "rapporti" in differenze, sulla base della proprietà log(p/q) = log(p)-log(q), facilitando notevolmente i calcoli, in un'epoca in cui non esistevano le calcolatrici.

8. L'integrazione delle funzioni esponenziali e reciproco

Abbiamo visto che integrazione e derivazione sono legate dalla proprietà:

*Sia **f** continua in [a, b]; se **G' = f** allora* $\int_{[a,\,b]} f \;=\; G(b) - G(a)$

nota come ***formula fondamentale del calcolo integrale***.

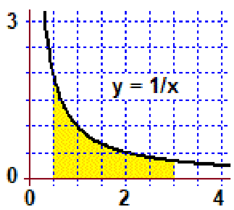


Dato che **D(exp) = exp** posso concludere che un'antiderivata della funzione esponenziale è la funzione esponenziale stessa.

Quanto vale l'area tra il grafico di **exp** e l'asse x compresa tra le rette y = −1 e y = 1?

Per una stima posso approssimarla con l'integrale tra −1 ed 1 di x → x+1, che vale 2·2/2 = 2 (l'area del triangolo raffigurato, delimitato superiormente dalla retta y = x+1).

Con precisione, posso calcolare: $\int_{[-1,\,1]}$ **exp** = **exp**(1)−**exp**(−1) = 2.350402.



D_x(log(x)) = 1/x. Quindi **log** è un'antiderivata di x → 1/x per x positivo.

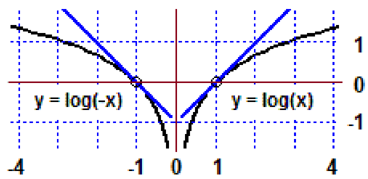
Quanto vale l'area tra il grafico di x → **1/x** e l'asse x compresa tra le rette y = 1/2 e y = 3?

Per una stima posso considerare che è circa 7 quadretti di lato 1/2, ossia circa 7·1/4 = 1.75.

Con precisione, posso calcolare: $\int_{[1/2,\,3]}$ **1/x** dx = **log**(3)−**log**(1/2) = 1.791759.

Notiamo che se x < 0 **D_x(log(−x)) = 1/x**. La cosa può essere dedotta dal grafico seguente, ma può essere dimostrata anche nel modo spiegato nel prossimo paragrafo.

Posso riassumere tutto con **D_x(log(|x|)) = 1/x** e visualizzarlo con lo script **Dlog**.



$\boxed{9}$ Calcola $\int_{[-10,\,0]}$ **exp** e $\int_{[-2,\,-1]}$ **1/x** dx.

Nota. Se esite $\int_{[a,x]}$ F per ogni x in un intervallo [a, b], la funzione x → $\int_{[a,x]}$ F viene spesso chiamata un ***integrale indefinito*** di F: essa esprime l'area orientata tra grafico di F ed asse orizzontale compresa tra le rette verticali di ascissa **a** e di ascissa **x**.

Per il teorema fondamentale dell'analisi un'integrale indefinito di F non è altro che una antiderivata di F.

Invece del termine ***antiderivata*** (che noi privilegeremo), oltre a "integrale indefinito", si usa anche ***primitiva*** (la primitiva di F è una funzione che viene "prima" dell'applicazione della derivazione). In qualche libro vi capiterà di incontrare questi termini (integrale indefinito, primitiva) invece di "antiderivata".

9. Alcune tecniche di derivazione

Accenniamo a due metodi molto comodi per calcolare le derivate di funzioni (che si affiancano a quelli già visti), su cui ritorneremo nel prossimo anno.

(A) Consideriamo il primo, comodo per calcolare le derivate di **funzioni composte**, rivedendo come calcolare d(log(−x))/dx. Penso a log(−x) come composizione del "cambio segno" e del "logaritmo": x → −x = u → log(u).

`d(log(-x))/dx = d(log(-x))/d(-x)*d(-x)/dx;`
`d(log(-x))/d(-x) = 1/(-x)` in quanto `d(log(u))/du = 1/u;`
inoltre `d(-x)/dx = -1;` quindi
`d(log(-x))/dx = 1/(-x)*(-1) = 1/x.`

Questo metodo in inglese viene chiamato *chain rule*, ossia "regola della catena", in quanto la derivata di una funzione viene spezzata in una *catena* di derivate, usando la "semplificazione" **1/dt·dt** = 1.

Altro esempio, più complesso: d(cos(sin(x²))/dx, pensando a x → x² = u → sin(u) = v → cos(v).

`d(cos(sin(x²)))/dx = d(cos(sin(x²)))/d(sin(x²)) * d(sin(x²))/d(x²) * d(x²)/dx;`
`d(cos(v))/dv = -sin(v)   [v = sin(x²)];`
`d(sin(u))/du = cos(u)    [u = x²];`
`d(x²)/dx = 2x;` quindi
`d(cos(sin(x²)))/dx = -sin(sin(x²)) * cos(x²) * 2x = -2x·cos(x²)·sin(sin(x²)).`

Posso verificare il calcolo in rete con **http://www.WolframAlpha.com** digitando `d(cos(sin(x^2)))/dx`.

(B) Consideriamo il secondo metodo, comodo per calcolare la derivata del **prodotto di funzioni**. Vediamolo direttamente con *WolframAlpha*. Se digito `d(f(x)*g(x))/dx` ottengo la somma dei prodotti di una funzione per la derivata dell'altra:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

ovvero: **D(f·g) = D(f)·g + f·D(g)**

Vediamo l'uso su $d(x^4 \cdot x^2)/dx$, che sapremmo calcolare direttamente:
$d(x^4 \cdot x^2)/dx = d\,x^6/dx = 6 \cdot x^5$.
$d(x^4 \cdot x^2)/dx = 4 \cdot x^3 \cdot x^2 + x^4 \cdot 2 \cdot x = 4x^5+2x^5 = 6x^5$. Ritroviamo il valore ottenuto sopra.
Altro esempio:
`d(log(x)·x)/dx = 1/x·x + log(x)·1 = 1+log(x)..`

10 Calcola (A) $D_x(\exp(x^3))$ e (B) $D_x(\exp(x)\cdot\log(x))$

Abbiamo anche che $\mathbf{d(x^x)/dx} = x^x \cdot (\log(x) + 1)$. Vedi **qui** come effettuare tale calcolo.

Qui puoi trovare una tabella che riassume ***come calcolare derivate ed antiderivate delle funzioni più usate***.

10. Equazioni e disequazioni con esponenziali e logaritmi

La risoluzione di equazioni e disequazioni che coinvolgono funzioni esponenziali e logaritmiche non comporta problemi nuovi (rispetto a quelli considerati nella scheda 2 sulle funzioni ed equazioni), se non quelli legati alle caratteristiche di queste funzioni. Facciamo qualche esempio:

• *Risolvere rispetto a x* $3^{x^2-2x} = 1/3$

$\log_3(3^{x^2-2x}) = \log_3(1/3)$ ho applicato la funzione inversa di $x \to 3^x$
$x^2 - 2x = -1$ ho tenuto conto che $1/3 = 3^{-1}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$
$x = 1$ [verifica: $3^{1-2} = 3^{-1} = 1/3$: OK]

• *Risolvere rispetto a x* $\log_3 \sqrt{x} = 2$
$\sqrt{x} = 3^2$ ho applicato la funzione inversa di $x \to \log_3(x)$
$x = (3^2)^2$ ho applicato la funzione inversa di $x \to \sqrt{x}$
$x = 9^2 = 81$ [verifica: $\log_3\sqrt{81} = \log_3 9 = 2$: OK]

• *Risolvere rispetto a x* $\log_x 5 = 3$
$x^3 = 5$ $\log_a b = c$ quando $a^c = b$
$x = 5^{1/3}$ ho applicato la funzione inversa di $x \to x^3$
$x = \sqrt[3]{5} = 1.70997\ldots$ [verifica: $\log_{5^{1/3}} 5 = 3$: OK]

• *Risolvere rispetto a x* $\log(2x-5) > \log(7-2x)$
La disequazione è definita quando $2x-5>0$ & $7-2x>0$, ossia $x>5/2$ & $x<7/2$
$2x-5 > 7-2x$ ho applicato $x \to e^x$, che è crescente
$x > 3$ ho aggiunto ai due membri 2x, poi 5 e poi ho diviso per 4
$3 < x < 7/2$ ho tenuto conto del dominio e del fatto che $3 > 5/2$

• *Risolvere rispetto a x* $\log(x^2 - 2) \le \log(x)$
La disequazione è definita quando $x^2>2$ & $x>0$, ossia $x>\sqrt{2}$
$x^2 - 2 \le x$ ho applicato $x \to e^x$, che è crescente
$x^2 - x - 2 \le 0$
$(x - 1/2)^2 - 1/4 - 2 \le 0$ ho "completato il quadrato"
$(x - 1/2)^2 \le 9/4$
$-3/2+1/2 \le x \le 3/2+1/2$
$\sqrt{2} < x \le 2$ ho tenuto conto del dominio

[invece di completare il quadrato potevo osservare subito che $x^2 - x - 2$ si azzera per x=2, fare la divisione per x-2, ottenere x+1, dedurre la scomposizione (x-2)(x+1); oppure potevo usare la formula per esprimere le eventuali soluzioni di una equazione polinomiale di 2° grado: $x = 1/2 \pm \sqrt{(1+8)}/2 = 1/2 \pm 3/2$; in entrambi i casi deducevo che $y = x^2-x-2$ è una parabola con la concavità verso l'alto che sta sotto l'asse x tra -1 e 2]

11 Risolvi rispetto a x l'equazione $8^{x+1} = 2^{x^2}$, dove 2^{x^2} sta per $2^{(x^2)}$.
Quindi risolvi la disequazione $8^{x+1} \ge 2^{x^2}$.

11. Approfondimenti

$x \to \log(e^x)$ e $x \to e^{\log(x)}$, pur essendo il logaritmo la *funzione inversa* dell'esponenziale, non sono la stessa funzione:

- la prima è definita per ogni input (equivale alla funzione identità $x \to x$), mentre la seconda è definita solo per input positivi (equivale alla funzione identità ristretta agli input positivi), in quanto $\log(x)$ è definito solo per x numero reale positivo;
- la prima ha per grafico la retta bisettrice del I e III quadrante, la seconda ha per grafico la semiretta bisettrice del I.

Ecco due link ad altri approfondimenti sui temi affrontati in questa scheda:

- le **catene di Sant'Antonio**,
- **note storiche e tecniche**.

12. WolframAlpha

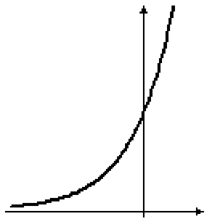
Adesso che hai fatto un po' di pratica con la manipolazione matematica, puoi ricorrere a del software di uso pubblico per risolvere molti problemi (analizzando comunque criticamente i risultati che ti vengono proposti e controllandone la sensatezza), **www.WolframAlpha.com**: **vedi**. Apri il software e copia nella finestra di input via via i seguenti "oggetti" e osserva, via via, la risposta ottenuta:

d e^x / dx	Log(30)	log(a^b)	solve log(2*x-5) > log(7-2*x) for x real
d e^x / dx	d log10(x)/dx	d log(x) / dx	solve log(x^2-2) <= log(x) for x real
d a^x / dx	log(a*b)	d f(x)*g(x) / dx	solve 3^(x^2-2*x) = 1/3 for x real

13. Esercizi

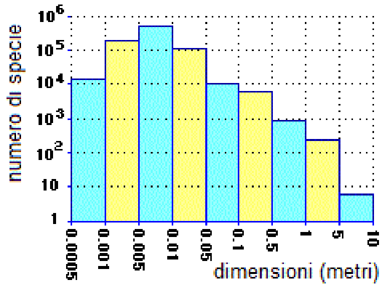
e1 A lato è tracciato parte del grafico di F. Quale, tra le seguenti, è la definizione di F? Perché?

(A) $F(x) = 3^{x+1}$ (B) $F(x) = 3^x+1$
(C) $F(x) = 3^{x-1}$ (D) $F(x) = 3^x-1$
(E) $F(x) = 3^{1-x}$ (F) $F(x) = 3^{|x|}$

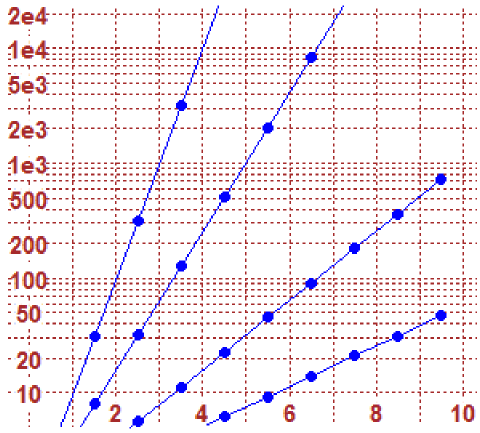


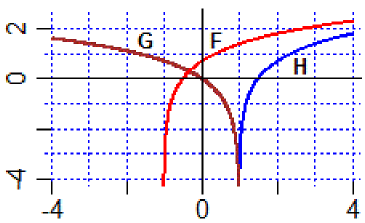
e2 Quanto vale $\log_{1/2}(1/8)$? Quanto $\log_2(1/8)$?

e3 La figura a lato, tratta da una rivista scientifica, rappresenta graficamente come le specie si distribuiscono per classi dimensionali (questa rappresentazione mette in luce, ad es., come vi siano poche specie di animali "grandi" e molte di animali "piccoli").
Quanto vale, approssimativamente, il rapporto tra il numero delle specie di dimensioni "0.05-0.1 metri" e quello delle specie di dimensioni "0.5-1 metri", cioè per ogni specie di dimensione tra 0.5 e 1 metro quante ve ne sono di dimensione tra 5 e 10 centimetri?



e4 A lato sono tracciati alcuni grafici di funzioni in una scala in cui le "x" sono rappresentate usualmente e le "y" sono rappresentate logaritmicamente. Associa ad ogni grafico la relativa funzione, scelta tra $y = 1.5^x$, $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$, $y = 10^x$





e5 A lato sono tracciati i grafici di tre funzioni $x \to \log(A \cdot x+B)$.
Scegli, per F, G ed H, valori di A e B scelti tra i seguenti: 0, 2, −2, 1, −1.

e6 Risolvi rispetto a x l'equazione $\log_3(\log_2 x) = 3$.

e7 Sia $F(x) = x^x$. Quanto vale $F(-2/3)$?. Quanto vale $F(-3/2)$? Qual è l'intervallo di ampiezza massima in cui F è definita? E quello in cui è derivabile? Traccia, ivi, con l'ausilio del computer, il grafico di F.

e8 Quanto valgono i limiti per $x \to \infty$ di $(1 + 1/x)^x$ e di $(1 + 1/x)^{\sqrt{x}}$? (usa il "trucco" impiegato per calcolare d(x^x)/dx)

e9 Calcola le derivate rispetto ad x di $\log(\log(x))$ e di $x\cdot e^x$.

e10 Calcola l'area della figura compresa tra $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ ($k>0$).
Quindi calcola l'area della figura illimitata compresa tra $y = e^{-x}$ e $y = 0$ che sta nel semipiano $x \ge 0$.

e11 Calcola l'area della figura compresa tra il grafico della funzione $x \to 3/(2\cdot x)$, l'asse x e le rette $y = -5$ ed $y = -1$.

e12 Calcola $d(x\cdot\log(x)-x)/dx$ e deducine qual è l'antiderivata di $\log(x)$.

e13 Risolvi rispetto a x la disequazione $\log(7-2x) < \log(2x-5)$.

e14 So che $d(1/x)/dx = d(x^{-1})/dx = -1/x^2$, $1/(f(x)) = f(x)^{-1} = g(f(x))$ con $g: q \to 1/q$. Quindi, usando quanto visto in §9, $\mathbf{d(\,1/f(x)\,)\,/\,dx} = d(1/f(x))\,/\,d(f(x)) \cdot d(f(x))\,/\,dx = \ldots$

e15 Usando quanto visto nell'esercizio precedente e in §9 ho che $\mathbf{d(\,f(x)/g(x)\,)\,/\,dx} = d(\,f(x)\cdot(1/g(x))\,)\,/\,dx = \ldots$

e16 Un gatto riesce a percepire suoni con la frequenza che va da circa 50 a circa $8\cdot10^4$ cicli al secondo. È più o meno ampio l'intervallo delle frequenze dei suoni che riesce a percepire un uomo sano? Affronta problemi simili per l'udito dei cani, dei topi e dei cavalli, cercando le informazioni su siti affidabili.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
crescita esponenziale (§2), *tempo di duplicazione* (§3), *funzioni esponenziali* (§4), *numero di Nepero* (§4), *logaritmo decimale* (§5), *scala logaritmica* (§5), *logaritmo naturale* (§6), *derivazione di esponenziali e logaritmi* (§6), *cambio base di esponenziali e logaritmi* (§6), *proprietà varie di esponenziali e logaritmi* (§7), *antiderivata della funzione esponenziale* (§8), *antiderivata della funzione reciproco* (§9).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol Istogramma RandomNum IntGauss AB3dim ricorsione banca banca2 micro Da^x Dlog ALTRO