

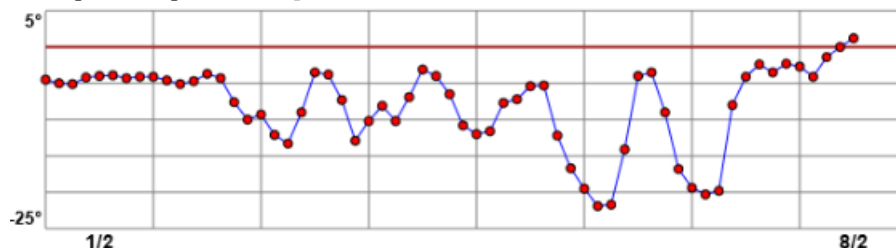
La derivazione di funzioni

Come varia l'andamento di una funzione

- [1. Il concetto di pendenza](#)
 - [2. La funzione derivata](#)
 - [3. Alcuni esempi di calcolo di derivate](#)
 - [4. Derivabilità e continuità](#)
 - [5. Notazioni e proprietà](#)
 - [6. La derivazione di sin e cos \(rinviabile\)](#)
 - [7. La derivazione della funzione esponenziale \(rinviabile\)](#)
 - [8. Esercizi](#)
- ➔ Sintesi

1. Il concetto di pendenza

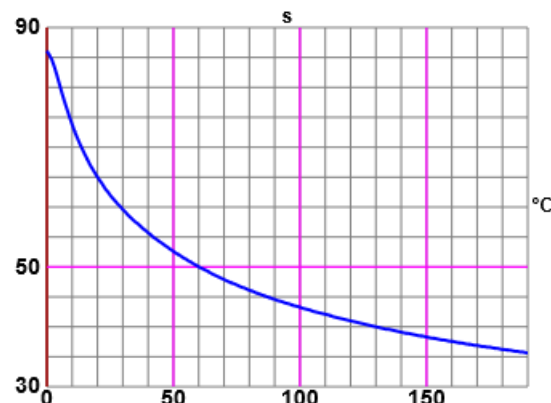
Il grafico che segue rappresenta una funzione interessante: la temperatura al variare del tempo rilevata alla stazione meteo di Sassello (paese ad 800 m di altitudine, in provincia di Savona), nei primi 8 giorni del febbraio del 2012. Abbiamo riportato solo i valori registrati ogni 3 ore. [\[qui\]](#) lo script in cui puoi recuperare i dati]



Vediamo che c'è stato un periodo di circa 1 giorno e mezzo (36 ore) durante il quale la temperatura non è praticamente cambiata. Ci sono stati poi periodi caratterizzati da brusche variazioni di temperatura: drastiche diminuzioni, seguite da improvvisi aumenti.

- 1 Qual è il periodo in cui la temperatura è rimasta più o meno costante? Intorno a quale valore intero essa ha oscillato? Qual è stata la velocità media di variazione della temperatura (misurata in °C all'ora) nell'intervallo di 6 ore in cui essa è cresciuta più rapidamente?

A destra un'altra immagine: mostra come è cambiata la temperatura di un termometro che abbiamo tolto da una pentola di acqua calda, lasciandolo poi raffreddare a contatto con l'ambiente esterno. Vediamo che la temperatura è andata sempre diminuendo: più rapidamente all'inizio, poi via via più lentamente al passare dei secondi. [\[qui\]](#) lo script in cui puoi recuperare i dati]

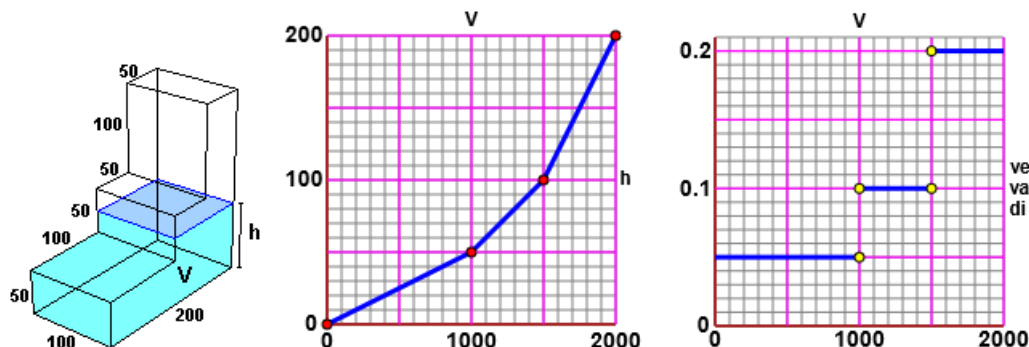


- 2 Di quanto è variata la temperatura nel primo minuto? e nel terzo?

Un altro esempio. Riempio con del liquido la piccola cisterna fatta "a scalini" raffigurata sotto, dove le dimensioni sono indicate in cm. Vediamo come varia il livello h (in cm) all'aumentare del volume V (in litri) del liquido immesso:

- inizialmente il livello cresce proporzionalmente al volume;
- quando si raggiunge il livello 50 la sezione del recipiente si riduce per cui dopo h cresce più rapidamente (la sezione si dimezza per cui il liquido si innalzerà con velocità doppia);
- arrivati al livello 100 la sezione si riduce ulteriormente per cui la velocità con cui varia h aumenta ancora.

Il grafico sottostante, al centro, evidenzia come è variato il livello del liquido al crescere del suo volume.



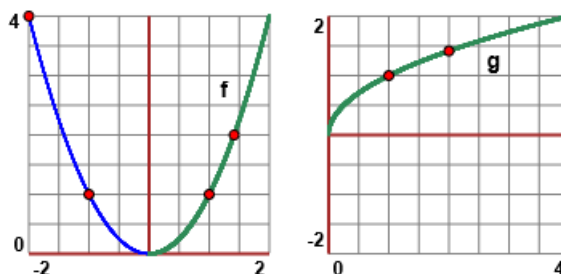
La velocità con cui h varia al variare di V nel primo tratto è $50/1000 = 0.05$ cm/litro. Poi, al dimezzarsi della sezione, la velocità raddoppia e diventa 0.1 cm/litro. Infine nell'ultima parte di cisterna diventa di 0.2 cm/litro. Il grafico a destra illustra come cambia la velocità con cui varia h .

- 3 L'acqua arriva alla quantità di 1500 litri innalzandosi di 1 mm per litro. Con che velocità di innalzamento prosegue?

Consideriamo le funzioni rappresentate a lato:

$$f: x \rightarrow x^2$$

$$g: x \rightarrow \sqrt{x}.$$



- 4 Qual è la pendenza del segmento che va dal punto del grafico di f con ascissa -2 a quello con ascissa -1 ? e quella del segmento che va dal punto del grafico con ordinata 1 a quello con ordinata 2 ?

Qual è la pendenza del segmento che va dal punto del grafico di g con ascissa 1 a quello con ascissa 2 ?

2. La funzione derivata

Nell'esempio discusso nel quesito 1 abbiamo visto come l'esame della pendenza di un grafico consenta di discutere efficacemente della velocità con cui varia un fenomeno, in questo caso della velocità con cui cambia la temperatura in una certa località.

Nel quesito 2 abbiamo considerato un fenomeno in cui la pendenza del grafico cambia con continuità, in un modo che intuitivamente possa essere descritto con una funzione.

Nel caso del fenomeno considerato nel quesito 3 possiamo trovare la pendenza dei tre tratti che ne costituiscono il grafico. Nei due punti che corrispondono a $V=1000$ e a $V=1500$ la pendenza varia di scatto: ad esempio a sinistra di $V=1000$ è $50/1000 = 0.05$, a destra è $50/500 = 0.1$.

Negli ultimi casi siamo di fronte a due grafici di funzioni astratte. Abbiamo visto come calcolare la pendenza di segmenti che ne congiungono due punti. Si capisce che man mano che il secondo punto si avvicina al primo abbiamo una stima più precisa della pendenza della curva nel primo punto. Abbiamo anche visto che la seconda funzione, che è l'inversa della prima ristretta agli input non negativi, ha pendenza che in qualche modo è collegata a quella del grafico della prima funzione.

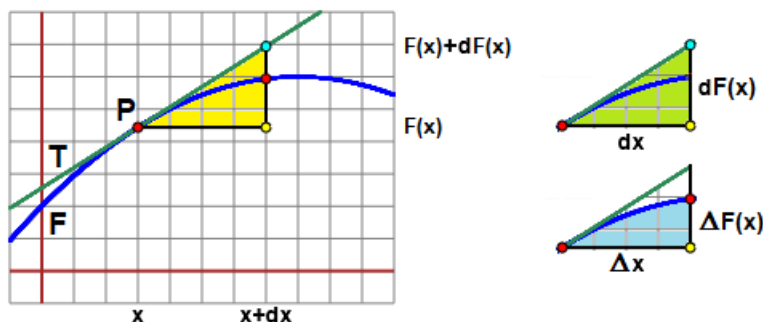
Vediamo, ora, come precisare queste idee.

Avrai sentito parlare di "tasso *tendenziale* di inflazione", "aumento *tendenziale* della produzione", Si tratta di indicatori economici con cui si cerca di descrivere la situazione attuale e individuare come essa evolverebbe se le cose continuassero ad andare come negli ultimi tempi. Analogamente, se nell'ultimo anno la temperatura media sulla Terra fosse salita di 0.04° potremmo dire che questa è la *tendenza* con cui varia la temperatura sul nostro Pianeta; potremmo prevedere che tra 5 anni la temperatura sarà variata di $0.04 \cdot 5 = 0.2$ gradi. Ma in entrambi i casi si tratta solo di approssimazioni di come evolveranno i fenomeni, che saranno tanto migliori quanto più la produzione o la temperatura della terra varieranno *proporzionalmente* allo scorrere del tempo; e questo avverrà con una buona approssimazione solo per durate relativamente piccole.

In generale, data una funzione F (continua) di una generica variabile x , possiamo considerare la *variazione tendenziale* di $F(x)$, ossia la variazione che $F(x)$ subirebbe passando da x a $x+\Delta x$ se in tale intervallo le variazioni dell'output fossero proporzionali a quelle dell'input, cioè se la funzione proseguisse con grafico rettilineo, cioè se fosse *lineare*. Viene usata la notazione $dF(x)$ [e il termine *differenziale* di $F(x)$] per indicare la variazione tendenziale di $F(x)$.

Nella figura seguente la funzione che ha tale retta come grafico è indicata T . La variazione dell'input per F (Δx) e per T (dx) sono ovviamente uguali.

La retta considerata viene chiamata *tangente* al grafico di F nel punto P di esso avente ascissa x .



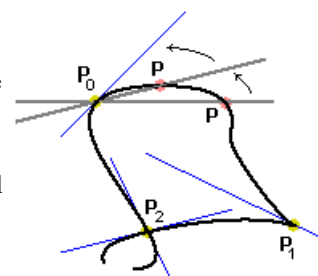
Passando da x a $x+\Delta x$ la funzione cambia andamento; a un certo punto inizia addirittura a decrescere. In questo caso la mia approssimazione di $\Delta F(x)$ [la variazione effettiva di $F(x)$] con $dF(x)$ è buona se Δx è piccolo, man mano peggiora al crescere di Δx .

Il concetto di *limite* ci consente di descrivere meglio il concetto di retta tangente. Considero il punto P_0 della curva a fianco. La retta PP_0 man mano che P si avvicina a P_0 muovendosi lungo la curva tende a disporsi come la retta che intuitivamente considereremmo la tangente. Posso dunque pensare di descrivere tale tangente con l'espressione $\lim_{P \rightarrow P_0} P_0P$.

Nel punto P_2 si presenta un *nodo*. Se pensiamo la curva come una traiettoria, si tratta di un punto che viene percorso due volte, in due successivi istanti. Se descrivessi matematicamente la curva, a seconda del percorso con cui mi avvicinassi a P_2 , otterrei due diverse tangenti.

Nel caso di P_1 ho invece un'unica tangente.

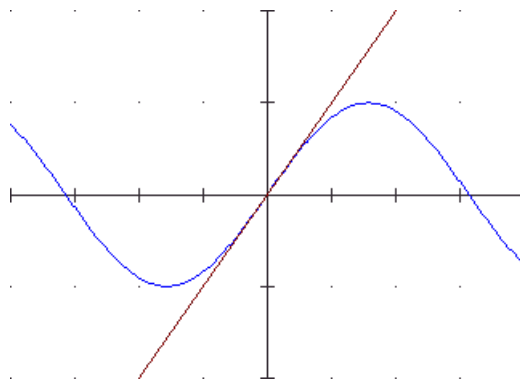
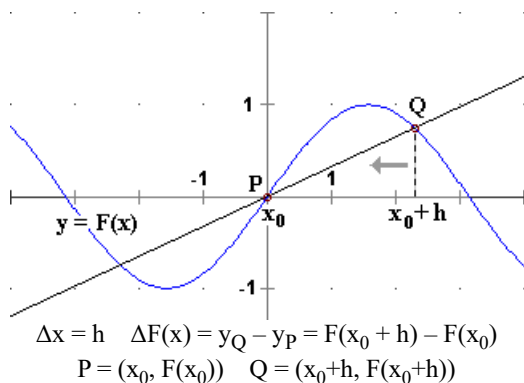
Ora abbiamo gli strumenti per precisare queste idee nel caso dei grafici di funzione.



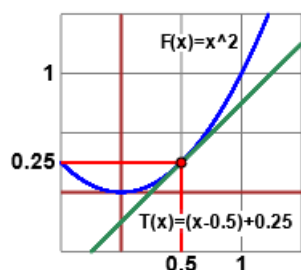
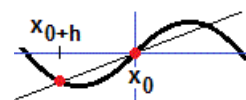
Dato un particolare input x_0 di una funzione F , si definisce *derivata* di F in x_0 la pendenza della retta a cui tende la retta PQ sotto raffigurata (P è il punto del grafico di F di ascissa x_0 e Q è quello di ascissa x_0+h) al tendere di h a 0 (con h abbiamo indicato, per

brevità, la variazione Δx dell'input):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$



Nota. Nelle immagini abbiamo considerato variazioni h positive, ma è da intendersi che può essere anche $h < 0$, come nella figura a lato. Il numero $(F(x_0 + h) - F(x_0))/h$, che esprime la *pendenza media* del grafico di F tra x_0 e $x_0 + h$, viene chiamato anche **rapporto incrementale** di punto iniziale x_0 e passo h (è il rapporto tra la variazione dell'output e l'incremento dell'input, o il suo decremento, se h è negativo).



Esempio C. Sia $F(x) = x^2$. Determiniamo la derivata di F in 0.5.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0.5 + h)^2 - 0.5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0.25 + h + h^2 - 0.25}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h) = 1$$

Dunque per $x \rightarrow 1/2$ la funzione è approssimabile con una funzione lineare di *coefficiente direttivo* 1:

$$T(x) = 1 \cdot (x - 0.5) + 0.25$$

5 Come puoi dedurre da quanto ora trovato che la derivata di $\sqrt{x}$ in 0.25 è 1?

La *derivata* di una funzione F (a 1 input e 1 output, e continua) si chiama così in quanto *deriva*, si ottiene da F . La derivata di F viene di solito indicata F' . L'operazione di ottenere F' da F viene chiamata *derivare* F . La funzione originaria si chiama *primitiva* (o *antiderivata*) della nuova funzione così ottenuta, ossia F è una primitiva di F' .

3. Alcuni esempi di calcolo di derivate

Vi sono alcuni *casi semplici* in cui è immediato determinare la funzione derivata. Se una *funzione* F è *costante* (ad es. la temperatura in un buon frigorifero in funzione del tempo, a patto che esso non venga mai aperto), del tipo $F(x) = k$, al variare dell'input (x = tempo) si ha sempre lo stesso output (la stessa temperatura); quindi $\Delta F(x)$ vale sempre 0. Sia da questo fatto che dal fatto che si tratta di un grafico orizzontale e quindi con pendenza nulla, possiamo subito dedurre che $F'(x) = 0$ per ogni x .

Se la funzione, invece, ha uscite che crescono proporzionalmente al crescere dell'input (ad es. il peso di un contenitore cilindrico al variare dell'acqua in esso contenuta), ossia se è una *funzione polinomiale di 1° grado*, del tipo $F(x) = ax + b$, la funzione derivata dovrà avere un valore costante e positivo (ad ogni tot di acqua in più corrisponde un altro tot di peso in più, indipendentemente da quanta acqua ci fosse prima). La cosa può essere dedotta più precisamente pensando al grafico: è una retta inclinata; la sua pendenza è la derivata: $F'(x) = a$ per ogni x . In altre parole la funzione lineare che approssima F è F stessa, che ha come coefficiente direttivo a .

Esempio D. Determiniamo la *funzione* derivata di $x \rightarrow x^2$.

Possiamo procedere come per l'esempio C, con un generico x al posto di $1/2$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Esempio E. Determiniamo la *funzione* derivata di $x \rightarrow x^3$.

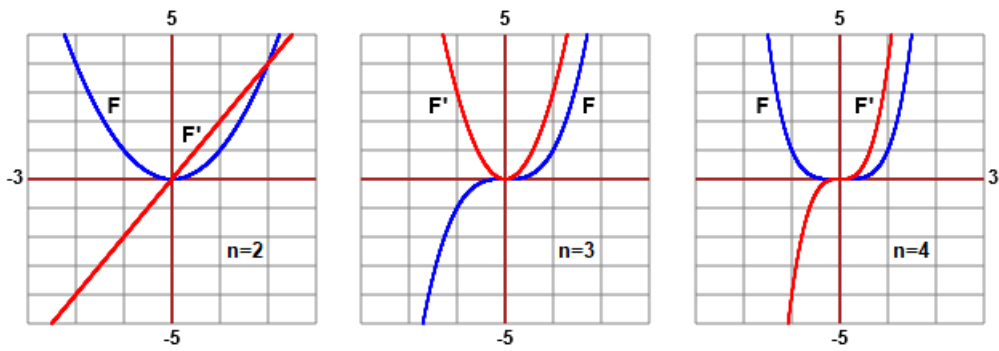
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Esempio F. Determiniamo la *funzione* derivata di $x \rightarrow x^n$ (per n intero positivo).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\dots)h^2 - x^n}{h} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + (\dots)h) = nx^{n-1}$$

Nello sviluppo di $(x + h)^n$, ossia nel calcolo del prodotto tra n fattori $(x + h)(x + h) \dots (x + h)$, compare la somma di n termini uguali a $x^{n-1}h$; tutti gli altri termini, a parte x^n , contengono h con almeno grado 2.

I grafici di alcune funzioni $x \rightarrow x^n$ e delle loro derivate:



Usando **D** per indicare l'operazione di derivazione, possiamo esprimere la regola precedente con:

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Evitiamo di dimostrare che la regola si può estendere dai numeri naturali **n** ad ogni numero reale **a**:

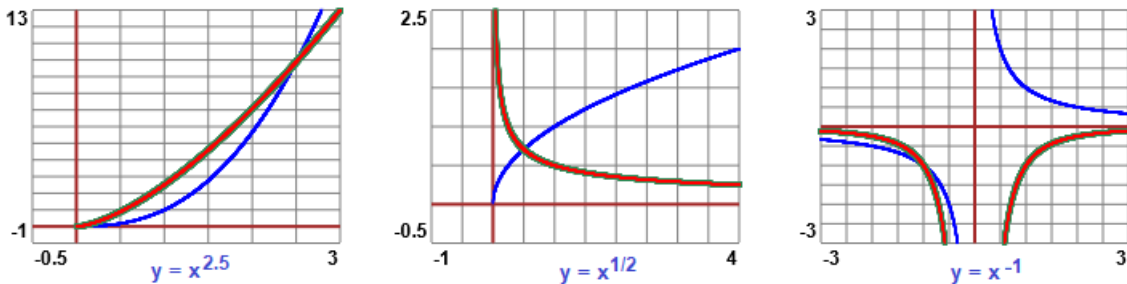
$$D_x(x^a) = ax^{a-1}$$

Quindi: $D_x(x^{2.5}) = 2.5 \cdot x^{1.5}$ $D_x(\sqrt{x}) = D_x(x^{1/2}) = 1/2 \cdot x^{-1/2}$ $D_x(1/x) = D_x(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2}$

Ci limitiamo a verificarlo graficamente, tracciando il grafico di **F** e di **F'**, approssimando **F'** nel seguente modo [avendo messo **F** in function **f(x)** e **F'** in function **h(x)**]:

```
function h(x) { dx=(bX-aX)/1e6; y = (f(x+dx)-f(x-dx))/(dx*2); return y }
[ho calcolato (f(x+dx)-f(x-dx))/(2·dx) invece di (f(x+dx)-f(x))/dx; ho usato dx piccolissimo]
```

F è il grafico blu, **F'** utilizzando la formula è il grafico verde, quello trovato con l'approssimazione grafica è quello rosso, che si sovrappone a quello trovato con la formula, a conferma che la formula è corretta.



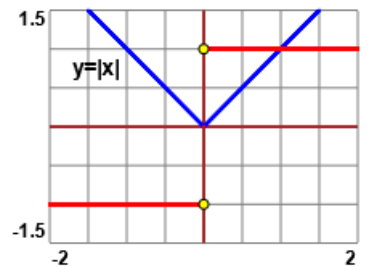
Qui puoi trovare gli script che producono i precedenti grafici: [uno](#), [due](#), [tre](#).

4. Derivabilità e continuità

I concetti di *derivata* e *differenziale* sono stati introdotti per studiare come al variare dell'input varia l'output di una funzione continua. *Non è detto, comunque, che una funzione continua in un intervallo sia derivabile in tutti i punti interni ad esso.*

Consideriamo ad esempio la funzione $x \rightarrow |x|$. Per $x < 0$ e per $x > 0$ si comporta in entrambi i casi come una funzione lineare, a sinistra di pendenza -1 , a destra di pendenza 1 . Le funzioni costanti che assumono questi valori costituiscono la sua derivata in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, ma essa non è definita in 0 (per gli altri input coincide con la funzione *segno*). Qui puoi trovare lo script che produce il grafico:

[quattro](#).



6 Traccia il grafico di $x \rightarrow |x^2 - 1|$ e quello della sua funzione derivata.

5. Notazioni e proprietà

Abbiamo visto che, data una funzione **f**, la sua funzione derivata si indica **f'**, dove l'apice "'" sta a indicare che si tratta di una nuova funzione rispetto a **f**. Ma esistono anche altre notazioni, in alcuni casi più utili di questa. Ecco le notazioni più usate per indicare la derivata di **f** in **x** (le ultime due si usano se si è convenuto di indicare **f(x)** con **y**):

f'(x)	(f(x))'_x	D(f(x))	D_x(f(x))	$\frac{df(x)}{dx}$	y'(x)	$\frac{dy}{dx}$
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)

Può essere comodo pensare la notazione **df(x)/dx** come una abbreviazione di $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x$, che è un modo in cui può essere riscritta la espressione con cui abbiamo definito **D(f)**: sarebbe il rapporto tra $\Delta f(x)$ e Δx quando questi diventano piccolissimi, "*infinitesimali*": **dv** indicherebbe una *variazione infinitesimale* della variabile **v**.

Le formule seguenti, in cui **f** e **g** sono funzioni e **k** è un numero, presentano due proprietà di base delle derivate che facilitano il calcolo delle derivate di vari tipi di funzioni (con esse e quanto visto nell'esempio **F** siamo in particolare in grado di derivare tutte le *funzioni polinomiali*):

$$D(kf) = kD(f) \quad D(f+g) = D(f)+D(g)$$

$$D_x(kf(x)) = kD_x(f(x)) \quad D_x(f(x)+g(x)) = D_x(f(x)) + D_x(g(x))$$

Ne vediamo un esempio d'uso e poi le motiviamo:

$$D_x(3x^2 + 2\sqrt{x}) = D_x(3x^2) + D_x(2\sqrt{x}) = 3D_x(x^2) + 2D_x(\sqrt{x}) = 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1/(2\sqrt{x}) = 6x + 1/\sqrt{x}$$

Abbiamo usato la seconda proprietà, poi la prima e, infine, $D_x(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

La validità di queste formule è facilmente giustificabile:

- Se, al variare di x , $f(x)$ varia di una quantità Q , allora, alla stessa variazione di x , $k \cdot f(x)$ varia di $k \cdot Q$. In breve: $\Delta(k \cdot f(x)) = k \cdot \Delta f(x)$. In termini geometrici: se moltiplico tutte le y per k la pendenza si moltiplica per k .
- Se, al variare di x , $f(x)$ varia di una quantità Q e $g(x)$ varia di una quantità R , allora, alla stessa variazione di x , $f(x)+g(x)$ varia di $Q+R$. In breve: $\Delta((f+g)(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$. In termini geometrici: se sommo, in corrispondenza delle stesse x , le y dei grafici di f e di g , ottengo un grafico che man mano ha come pendenza la somma delle pendenze dei due grafici.

Attenzione 1. $D_x(7\sqrt{x}) = 7D_x(\sqrt{x})$ ma $D_x(\sqrt{7x})$ non equivale a $7D_x(\sqrt{x})$.

Attenzione 2. Prima di mettersi ad usare delle formule conviene sempre ragionare. Per un esempio banale si pensi a $d/dx (F(x)+G(x))$ con $F(x)=|x|$ e $G(x)=-|x|+1$. Uno potrebbe pensare che la derivata in 0 non esiste in quanto non esistono quelle di F e di G (il cui grafico in 0 ha dei punti angolosi). Ma il fatto che non esistano $F'(x)$ e $G'(x)$ non implica che non esista $d/dx (F(x)+G(x))$. In questo caso $(F+G)(x)$ vale 1 per ogni x , e quindi la sua derivata vale, ovunque, 0.

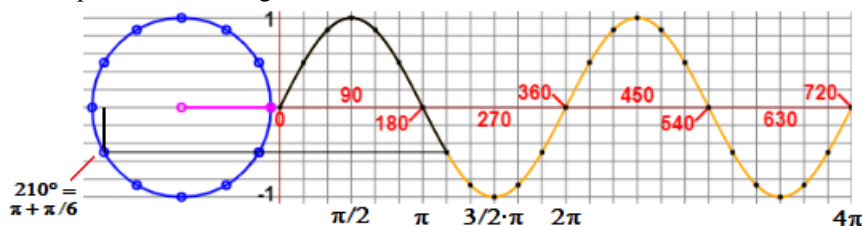
7 Utilizzando opportunamente il concetto di derivata, individua il vertice della parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 1/7$ e, quindi, scrivila nella forma $y = (x-h)^2 + k$.

Vedremo altre proprietà delle derivate nei *due paragrafi successivi*. Si tratta di proprietà che vengono solo accennate: in alcune classi possono servire per affrontare qualche tematica particolare, nelle altre *possono essere affrontate successivamente*. Nei prossimi anni, comunque, approfondirete lo studio della derivazione.

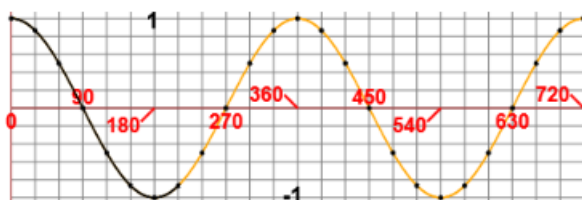
6. La derivazione di sin e cos

Nella scheda [La matematica e lo spazio 2](#) abbiamo introdotto le funzioni circolari ed abbiamo visto come le rotazioni possono essere espresse sian usando l'unità di misura *grado* sia come numeri puri, usando la strada che occorre percorrere lungo il cerchio di raggio 1 a partire dal punto più a destra del cerchio. Abbiamo visto anche che, quando si vuole chiarire che non si stanno usando i gradi, si può aggiungere l'espressione *radianti*.

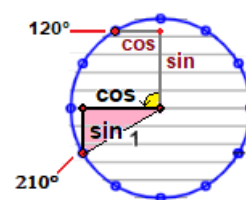
In fondo alla scheda [Il concetto di limite](#) abbiamo considerato lo script [seno](#) che ci illustra in modo animato il significato della funzione *sin*. Sotto ne abbiamo riprodotto un'immagine.



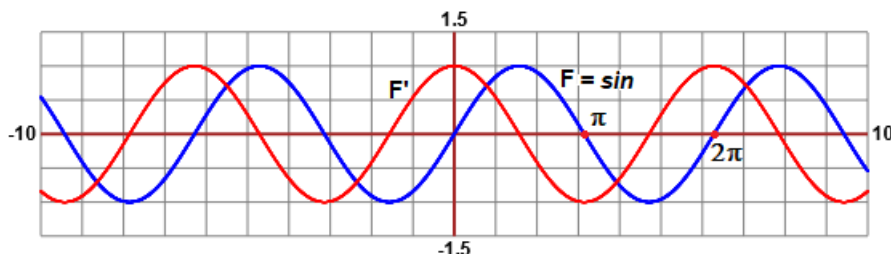
Si vede in particolare che a 210° , ovvero a $\pi + \pi/6$ (radianti), corrisponde il seno di $-1/2$. Possiamo verificare ciò con la [grande CT](#):
 $210^\circ = 3.6651914291880923$ $\sin(3.6651914291880923) = -0.5$



Con [questo](#) script posso studiare l'andamento della funzione *cos*, ed osservare che ha lo stesso grafico di *sin*, traslato a sinistra di 90° . Con la CT ho $\cos(3.6651914291880923) = -0.8660254037844386$. Ma posso anche usare il teorema di Pitagora: $\cos(210^\circ) = -\sqrt{1 - \sin(210^\circ)^2} = -\sqrt{1 - 1/4} = -\sqrt{3/4} = -\sqrt{3}/2 = -0.8660254037844386$

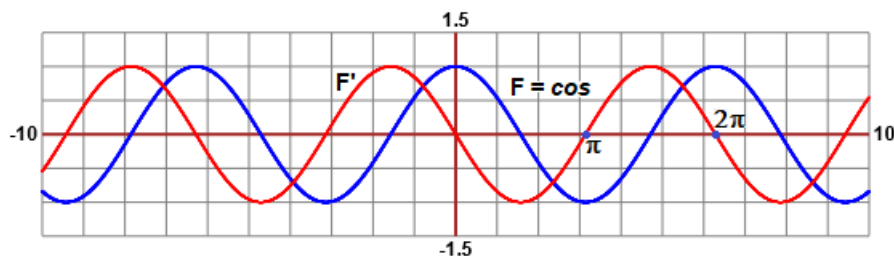


Studiamo la derivata di *sin*, ovvero la pendenza del grafico $y = \sin(x)$. Tale grafico ha andamento periodico e, quindi, avrà andamento periodico anche la sua pendenza, con lo stesso periodo. Possiamo studiare la cosa con uno script analogo a quelli considerati per $y=x^n$, [deriv_sin](#), che traccia in blu il grafico di *sin* e in rosso il grafico della sua derivata (sull'asse x sono segnati i radianti, non i gradi):



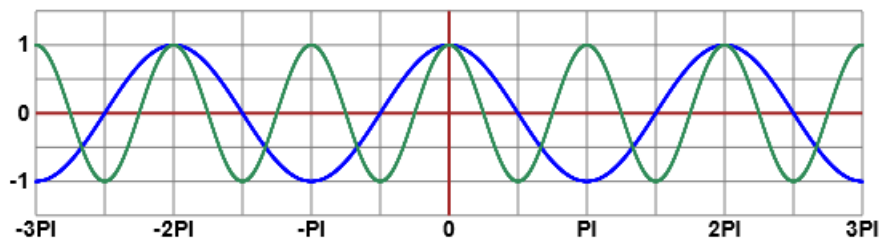
Si percepisce immediatamente che il grafico rosso non è altro che il grafico della funzione *cos*. Si può effettivamente dimostrare che $D(\sin) = \cos$.

cos ha lo stesso grafico del seno, spostato a sinistra di $\pi/2$. Usiamo, analogamente a prima, lo script [deriv_cos](#):



Il grafico della derivata (F') è quello di $\sin$ capovolto verticalmente, ossia cambiato di segno: $D(\cos) = -\sin$.

Sotto è riportato il grafico (verde) di $x \rightarrow \cos(2x)$, assieme a quello (blu) di $x \rightarrow \cos(x)$ (realizzati con [questo](#) script); i lati verticali della griglia questa volta non distano 1 ma $\pi/2$.



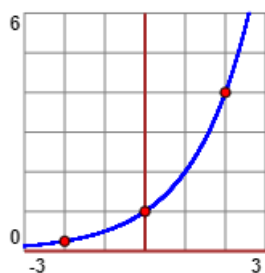
Come si vede, la frequenza viene raddoppiata: moltiplicando per 2 l'input il grafico viene infittito di un fattore 2, e la pendenza viene moltiplicata per 2. Avevamo che: $D_x \cos(x) = -\sin(x)$, abbiamo che: $D_x \cos(2x) = -2 \cdot \sin(2x)$.

Analogamente, avevamo che: $D_x \sin(x) = \cos(x)$, abbiamo che: $D_x \sin(2x) = 2 \cdot \cos(2x)$.

Abbiamo esiti analoghi se al posto di 2 c'è un'altra costante: $D_x \cos(hx) = -h \cdot \sin(hx)$, $D_x \sin(hx) = h \cdot \cos(hx)$.

8 Qual è il periodo di $x \rightarrow \sin(3x)$? Qual è la pendenza della tangente al suo grafico nel punto di ascissa $\pi/3$?

7. La derivazione della funzione esponenziale



A lato è tracciato il grafico della funzione $x \rightarrow 2^x$ e sono evidenziati i punti che rappresentano i valori che essa associa a 0 (1), a 2 (4) e a -2 (1/4). Ricordiamo come sono calcolati i valori corrispondenti a esponenti decimali finiti:

$$2^{0.4} = 2^{4/10} = 2^{2/5} = (2^2)^{1/5} = 5\sqrt[5]{4}.$$

Con un mezzo di calcolo ottengo valori anche per altri esponenti; per 2^π (2^{π}) con la [grande CT](#) ottengo (arrotondato) 8.82497782707629

Ricordiamo come i calcoli con esponenti non finiti sono definiti a partire da quelli con esponenti finiti ([I Numeri 2](#)):

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751\dots$$

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 & \leq 2^\pi &\leq 2^4 = 16 \\ 2^{3.1} &= 10\sqrt[10]{(2^{31})} = 8.5741877002\dots & \leq 2^\pi &\leq 2^{3.2} = 10\sqrt[10]{(2^{32})} = 9.1895868399\dots \\ 2^{3.14} &= 50\sqrt[50]{(2^{157})} = 8.8152409270\dots & \leq 2^\pi &\leq 2^{3.15} = 20\sqrt[20]{(2^{63})} = 8.8765557765\dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ 2^{3.141592} &= 8.8249738290\dots & \leq 2^\pi &\leq 2^{3.141593} = 8.8249799460\dots \\ \dots & & \dots & \dots \end{aligned}$$

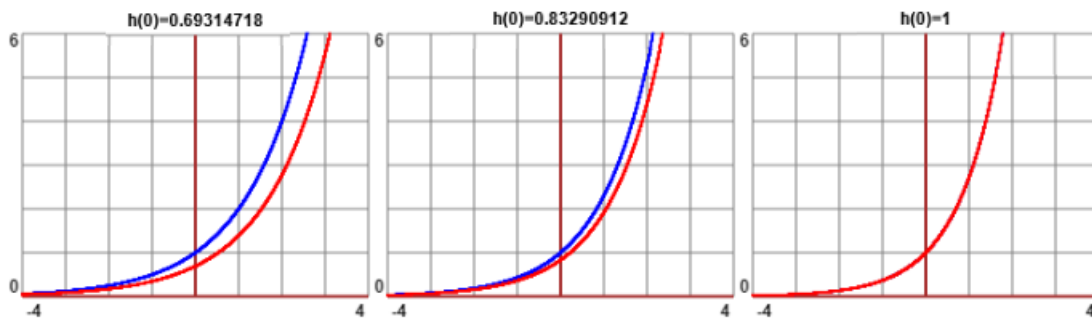
Dal grafico si capisce che la funzione cresce via via più rapidamente. Per un esempio pensa ad una agenzia che presta ad una persona una certa somma di denaro e le chiede la restituzione della stessa somma di denaro moltiplicata per 2^A , dove A è il tempo trascorso in anni. Se restituisce il denaro subito lo rende non aumentato, in quanto $2^0 = 1$; se lo restituisce dopo 1 anno deve raddoppiarlo in quanto $2^1 = 2$; dopo 2 anni deve quadruplicarlo in quanto $2^2 = 4$; e così via. Dopo un quarto di anno deve moltiplicarlo per $2^{1/4} = 1.1892\dots$

Per un altro esempio pensa ad una popolazione di numerosi batteri. In opportune condizioni ciascun batterio si duplica trascorso un certo intervallo di tempo, per cui si ha che complessivamente la popolazione viene moltiplicata per 2^T , dove T è il tempo trascorso prendendo come unità di misura il tempo per la duplicazione. Se inizialmente i batteri erano 1000, trascorso il tempo $10 T$ essi sono $1000 \cdot 2^{10} = 1024000$.

Entrambe le situazioni sono rappresentate graficamente da curve simili a quella raffigurata sopra.

Le funzioni $x \rightarrow 2^x$ e, più in generale, $x \rightarrow B^x$ (con B positivo e diverso da 1) si chiamano **esponenziali** in quanto dipendono dal valore dell'esponente. È evidente quanto sia utile valutare la velocità con cui cresce una funzione di questo genere.

Facciamolo con degli script per tracciare insieme al grafico di una funzione F (blu) quello di F' (rosso) come quelli introdotti nel §3. La prima delle seguenti figure è ottenuta con [2aX](#), che traccia il grafico di $y=2^x$ e della sua derivata. Come si vede, il grafico di questa sembra essere ottenuto da quello della funzione scalando verticalmente.



L'ipotesi è confermato dalla seconda figura, ottenuta con [23aX](#), il grafico di $y=2.3^x$ e della sua derivata. I due grafici sono ora più vicini. La terza figura è ottenuta con [EaX](#), in cui viene considerata $y=2.718281828459045^x$ e si ottiene $F'(0)=h(0)=1$.

Si può effettivamente dimostrare che la funzione $x \rightarrow B^x$ che ha per derivata sé stessa è quella in cui $B = 2.71828182845904523536028747135\dots$. È un numero irrazionale, indicato con e e chiamato *numero di Nepero*.

La funzione $x \rightarrow e^x$ viene in genere indicata **exp**. Negli script è indicata *Math.exp*. Dunque:

$$D(\exp) = \exp$$

Nella nostra [grande CT](#) il numero di Nepero e è indicato NE e la funzione *exp* col tasto **[exp]**.

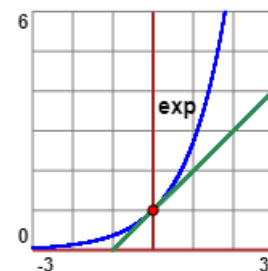
Negli altri casi, $D_x(2^x) = 0.69314718 \cdot 2^x$, $D_x(2.3^x) = 0.83290912 \cdot 2.3^x$. Vedrai successivamente che il coefficiente moltiplicativo lo si ottiene utilizzando la particolare funzione **log** (logaritmo), presente anche nella nostra [grande CT](#).

9 Calcola utilizzando la [grande CT](#) $\log(2)$, $\log(2.3)$, $\log(e^{2.5})$, $e^{\log(2.5)}$.

Dunque: $D_x(a^x) = \log(a) \cdot a^x$

Le funzioni esponenziali hanno per derivata la stessa funzione esponenziale moltiplicata per una costante positiva; quindi se le derivassimo ulteriormente otterremmo ancora delle funzioni esponenziali moltiplicate per una costante positiva. Le funzioni polinomiali, invece, derivate successivamente assumono un grafico via via più piatto, fino a diventare rettilineo. La funzione **log**, come avrai capito dal quesito 9, è la funzione inversa di **exp**.

Tutte le funzioni esponenziali in 0 valgono 1, ossia hanno grafico per passa per (0,1). La funzione **exp**, avendo come derivata sé stessa, in 1 ha come derivata 1 e quindi ha tangente con pendenza 1. Abbiamo, dunque, quanto rappresentato nella figura qui a destra.



8. Esercizi

- e1** Espolora i file con cui sono stati tracciati i grafici che precedono il quesito 3, [uno](#) e [due](#), e individua i comandi specifici introdotti per generarli.
- e2** Schizza il grafico di $x \rightarrow |(x-3)^2-2|$. Fai uno schizzo della sua derivata (senza l'aiuto del computer).
- e3** Traccia il grafico di $x \rightarrow (x-2) \cdot (x+2)$ e schizza quello della sua pendenza.
- e4** Trova la pendenza della retta tangente a $y = 3 \cdot x^2 - 1$ nel punto di ascissa 1. Traccia il grafico della curva e quello della retta.
- e5** Traccia il grafico di $x \rightarrow (x-2) \cdot (x-1) \cdot (x+2)$ (controlla quanto hai prodotto col computer) e schizza quello della sua pendenza.
- e6** Se $F(x)$ vale x per $x < 2$ e $2 \cdot x - 2$ altrimenti, esiste $F'(2)$?
- e7** Se $G(x)$ vale x^2 per $x < 1$ e $2x - 1$ per $x \geq 1$, esiste $G'(1)$?
- e8** Se $H(x)$ vale $x^2/2$ per $x \geq 0$ e 0 per $x < 0$, esiste $H'(0)$?
- e9** Se una funzione polinomiale ha esponente pari come è (pari o dispari) quello della sua funzione derivata? E se ha esponente dispari?
- e10** Modifica [questo](#) script, che traccia il grafico di $x \rightarrow 1/(1+x)$, in modo che tracci anche il grafico della sua derivata. Prova poi a calcolare $d/dx \ 1/(1+x)$ e controlla (graficamente) la risposta.
- e11** Modifica [questo](#) script, che traccia il grafico di $x \rightarrow (x-1)/(x+1)$, in modo che tracci anche il grafico della sua derivata. Prova poi a calcolare $d/dx \ d/dx \ (x-1)/(x+1)$ e controlla (graficamente) la risposta [traccia: $(x-1)/(x+1)$ equivale a $1 - \dots$].
- e12** Se hai affrontato il §6, affronta questo quesito: quanto vale $d/dx (\sin(x) + \cos(x))$? E $d/dx (\sin(x) - \cos(x))$? (motiva le risposte)
- e13** Se hai affrontato il §6, calcola $d/dx -\sin(-x)$, $d/dx (\cos(3 \cdot x)/3)$, $d/dx (\sin(2 \cdot x)/2)$, $d/dx \sin(n \cdot x)$.

e14 Se hai affrontato il §7, traccia il grafico di $x \rightarrow \exp(-x)$.

e15 Se hai affrontato il §7, esegui [questo](#) script e discutine le uscite.

e16 Lo script [Deriv](#) consente di tabulare funzioni e approssimare le derivate di funzioni. Attualmente la funzione (in x) è $\text{pow}(x,3)+1$, cioè x^3+1 . Ecco alcuni esempi di uscite (dal basso in alto):

$x_1 = 4, x_2 = 4.00001 \rightarrow DF/Dx = 48.00011999929939$

$x_1 = 4, x_2 = 4.0001 \rightarrow DF/Dx = 48.00120001004689$

$x_1 = 4, x_2 = 4.001 \rightarrow DF/Dx = 48.01200100000175$

$x_1 = 4, x_2 = 4.01 \rightarrow DF/Dx = 48.12009999999947$

$x_1 = 4, x_2 = 4.1 \rightarrow DF/Dx = 49.2100000000001$

$x = 4 \rightarrow F(x) = 65$

$x = 3 \rightarrow F(x) = 28$

$x = 2 \rightarrow F(x) = 9$

$x = 1 \rightarrow F(x) = 2$

$x = 0 \rightarrow F(x) = 1$

Impiegalo (via via modificandolo) per trovare le derivate (o decidere che non esistono) di cui negli esercizi e4, e6, e7, e8.

Oppure (per **ogni** funzione) usa la [grande CT](#), come già fatto alla fine della scheda sui "limiti":

(metti in Q il rapporto incrementale usando M come dx, e poi via via scrivi Q come input)

Q	
+/- 1/x √ exp log Log sin cos tan asin acos atan ! * = C	
Round	= 48.00120000993502 B
M	1e-4 Q (pow(4+M,3)+1 - pow(4,3)-1) / M
M = 1e-4	48.00120000993502
M = 1e-3	48.01200100001779
M = 1e-2	48.120099999998445
M = 1e-1	49.20999999999978

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

differenziale (§2), derivata (§2), rapporto incrementale (§2), primitiva (§2), derivata rispetto ad x di x^α (§3), continuità e derivabilità (§4), derivata di una somma di funzioni (§5)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: [piccola CT](#) [grande CT](#) [isto](#) [isto con %](#) [boxplot](#) [striscia](#) [100](#) [ordina](#) [Grafici](#) [divisori](#) [Indet](#) [distanza](#) [Triang](#) [eq.polinomiale](#) [eq.nonPolin](#) [sistemaLin](#) [moltPolin](#) [sempliciEq](#) [divisori](#) [fraz/mcd](#) [opFraz](#) [SumPro](#) [pioggia](#) [termometro](#) [Volum1](#) [Volum2](#) [FF'1](#) [FF'2](#) [FF'3](#) [FF'4](#) [sin](#) [cos](#) [deriv_sin](#) [deriv_cos](#) [D-2aX](#) [D-23aX](#) [D-EaX](#) [e10](#) [e11](#) [e15](#) [GraficD](#) [Deriv](#)