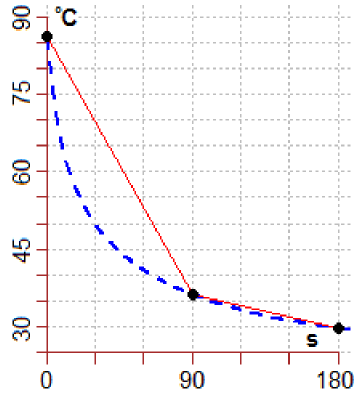
Derivazione e Integrazione. La funzione esponenziale - Sintesi

0. Premessa

In questa scheda riassumiamo brevemente l'introduzione ai concetti di derivazione e integrazione e alla funzione esponenziale affrontata negli anni precedenti.

1. La derivazione delle funzioni



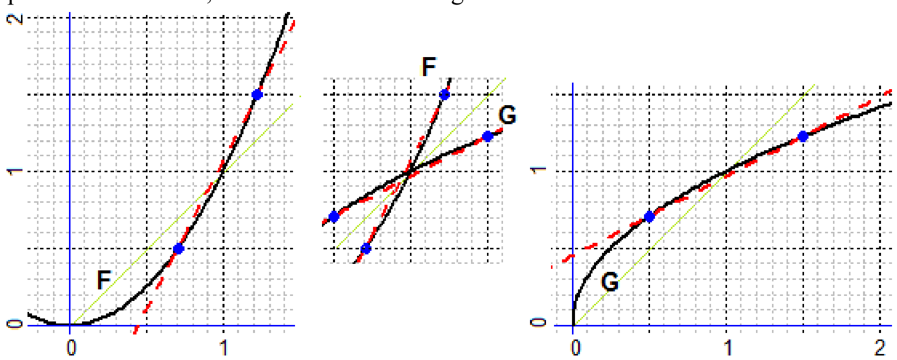
Il grafico a destra mostra come è cambiata la temperatura di un termometro tolto da una pentola di acqua calda e lasciato raffreddare a contatto con l'ambiente esterno. La temperatura è andata sempre diminuendo: più rapidamente all'inizio, poi via via più lentamente. Nei primi 90 s è scesa di circa 50 °C, nei successivi 90 s di circa 6 °C. Nel primo tratto la pendenza è -50/90 = -5/9, nel secondo è −6/90 = −1/15.

Sotto a sinistra è tracciato, in parte, il grafico di F: $x \to x^2$, a destra quello di G: $x \to \sqrt{x}$, la sua inversa ristretta agli input non negativi. A differenza del caso precedente sono di fronte ai grafici di funzioni astratte.

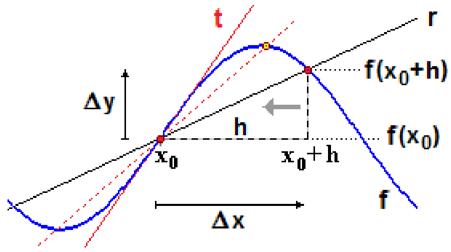
Che relazione c'è tra la pendenza del segmento che va dal primo al secondo punto del grafico di F evidenziati e la pendenza del segmento che congiunge i corrispondenti punti di G, che scambiano le "x" con le "y"? Sono una la reciproca dell'altra.

Nel caso di G le ascisse variano da 0.5 a 1.5 e le ordinate da $\sqrt{0.5}$ a $\sqrt{1.5}$, e la pendenza del segmento è $\Delta y/\Delta x = (\sqrt{1.5}-\sqrt{0.5})/1 = 0.5176\ldots$ Nel caso di F $\Delta y/\Delta x = 1/(\sqrt{1.5}-\sqrt{0.5}) = 1.931\ldots$

La retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa di 1 ha pendenza che è il limite della pendenza del segmento analogo al precedente man mano che i sui estremi si avvinano a tale punto. E quella della retta tangente al grafico della funzione inversa G nel punto corrispondente sarà il reciproco di tale valore, come si vede bene nel grafico al centro.



Nel caso di F e G posso calcolare la pendenza in un punto sulla base della loro espressione. Ecco come farlo in generale. Dato un particolare input x_0 di una funzione **f** continua in x_0, si definisce ***derivata*** di **f** in x_0 la pendenza della retta **t** a cui tende la retta **r** raffigurata a lato al tendere di *h* a 0 (con *h* si è indicata, per brevità, la variazione Δx dell'input). La retta **t** viene chiamata ***tangente*** al grafico di **f** nel punto $(x_0,f(x_0))$. In formula:



$$\textbf{derivata di f in } x_0 = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h}$$

Con ***derivare una funzione* f** (a 1 input e 1 output, e continua) si intende *ottenere* da essa una nuova funzione **f '** – la *funzione derivata* – che associ ad x la derivata di **f** in x. La funzione originaria si chiama ***primitiva*** (o *antiderivata*) della nuova funzione così ottenuta.

2. Alcuni esempi e alcune regole

Vi sono alcuni *casi semplici* in cui è immediato determinare la funzione derivata. Se una ***funzione*** è ***costante*** (ad es. la temperatura in un buon frigorifero in funzione del tempo, a patto che esso non venga mai aperto), del tipo ***f(x) = k***, al variare dell'input (x = tempo) si ha sempre lo stesso output (la stessa temperatura); quindi Δf(x) vale sempre 0. Sia da questo fatto che dal fatto che si tratta di un grafico orizzontale e quindi con pendenza nulla, possiamo subito dedurre che ***f '(x) = 0*** per ogni x.

Se la funzione, invece, ha uscite che crescono proporzionalmente al crescere dell'input (ad es. il peso di un contenitore cilindrico al variare dell'acqua in esso contenuta), ossia se è una ***funzione polinomiale di 1° grado***, del tipo ***f(x) = ax + b***, la funzione derivata dovrà avere un valore costante e positivo (ad ogni tot di acqua in più corrisponde un altro tot di peso in più, indipendentemente da quanta acqua ci fosse prima). La cosa può essere dedotta più precisamente pensando al grafico: è una retta inclinata; la sua pendenza è la derivata: ***f '(x) = a*** per ogni x.

Determiniamo la derivata della funzione F: $x \to x^2$ considerata all'inizio.

$$\lim_{h\to 0} \underline{(x+h)^2 - x^2} \;=\; \lim_{h\to 0} \underline{x^2 + 2xh + h^2 - x^2} \;=\; \lim_{h\to 0} \underline{2xh + h^2} \;=\; \lim_{h\to 0} (2x+h) \;=\; \mathbf{2x}$$

h h h

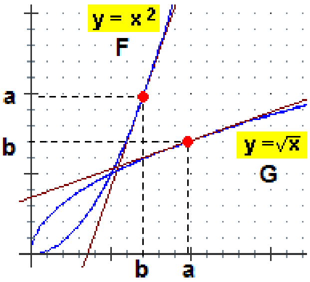
Nell'esempio inziale abbiamo visto che intorno ad x=1 la pendenza del grafico di F era circa 1.93. Ora abbiamo che è esattamente 2·1 = 2.

Determiniamo la funzione derivata di $x \to x^3$.

$$\lim_{h\to0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 - x^3}{h} = \ldots = \lim_{h\to0} (3x^2+3xh+h^2) = \mathbf{3x^2}$$

Tutti gli esempi visti finora sono casi particolari della seguente regola di derivazione (dove D indica l'operazione di derivazione), valida per ogni numero reale α:

$$\mathbf{D_x (x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}}$$



Vediamo in particolare che cosa si ha nel caso di $x \to \sqrt{x} = x^{1/2}$.

$$D_x (\sqrt{x}) = D_x (x^{1/2}) = 1/2\cdot x^{1/2-1} = x^{-1/2}/2 = 1/(2\sqrt{x})$$

Ritroviamo quanto ottenuto nel caso della funzione G considerata all'inizio. G'(x) per x = 1 vale $1/2\cdot 1^{-1/2} = 1/2$. Là avevamo trovato l'approssimazione 0.517…. Notiamo che in generale la derivata di G in **a** in cui G vale **b** è pari al reciproco derivata della funzione inversa F in **b**. Su ciò ritorneremo.

Data una funzione **h**, la funzione derivata di **h** si nota **h'** o D(**h**). La derivata di **h** in x si nota **h'**(x) o D(**h**)(x) o D_x**h**(x). Accanto a queste ultime notazioni di usa **dh(x)/dx**, che può essere pensata come una abbreviazione di $\lim_{\Delta x\to0} \Delta h(x)/\Delta x$: sarebbe il rapporto tra Δh(x) e Δx quando questi diventano piccolissimi, "*infinitesimali*": **dv** indicherebbe una *variazione* ***infinitesimale*** della variabile **v**.

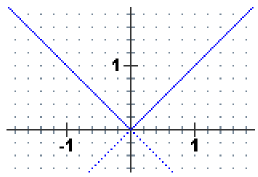
Le formule seguenti, in cui **f** e **g** sono funzioni e **k** è un numero, presentano due proprietà di base delle derivate che facilitano il calcolo delle derivate di vari tipi di funzioni (con esse ad esempio siamo in grado di derivare tutte le *funzioni polinomiali*):

D(kf) = kD(f)	***D(f+g) = D(f)+D(g)***
$D_x(k f(x)) = k D_x(f(x))$	$D_x(f(x)+g(x)) = D_x(f(x)) + D_x(g(x))$

La motivazione è abbastanza semplice. Per la prima: se dilato verticalmente un grafico di un fattore k la pendenza in ogni punto di esso viene moltiplicata per k. Per la seconda: se faccio la somma di due funzioni la pendenza in ogni punto del grafico di essa è la somma delle pendenze dei grafici delle due funzioni. Vediamone un esempio d'uso:

$$D_x(3x^2 + 2\sqrt{x}) = D_x(3x^2) + D_x(2\sqrt{x}) = 3D_x(x^2) + 2D_x(\sqrt{x}) = 3\cdot 2x + 2\cdot 1/(2\sqrt{x}) = 6x + 1/\sqrt{x}$$

Abbiamo usato la seconda proprietà, poi la prima e, infine, quanto visto per la derivazione di x^α.



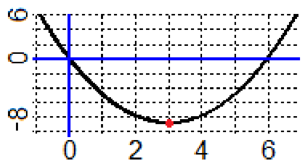
Attenzione 1. $D_x(7\sqrt{x}) = 7D_x(\sqrt{x})$, che vale $7/(2\cdot\sqrt{x})$, **ma** $D_x(\sqrt{(7x)})$ **non** equivale a $7D_x(\sqrt{x})$.
Ecco un "trucco" comodo per calcolarla. Penso a 7x come ad un'unica variabile u e ragiono come se facessi un calcolo algebrico:
$d\sqrt{(7x)}/dx = d\sqrt{(7x)}/d(7x) \cdot d(7x)/dx = d\sqrt{u}/du \cdot d(7x)/dx = 1/(2\sqrt{u})\cdot 7 = 7/(2\sqrt{u}) = 7/(2\sqrt{(7x)}) = \sqrt{7}/(2\cdot\sqrt{x})$.

Attenzione 2. *Non è detto che una funzione continua in un intervallo sia derivabile in tutti i punti interni ad esso*. Consideriamo ad esempio la funzione $x \to |\mathbf{x}|$. Per x<0 e per x>0 si comporta in entrambi i casi come una funzione lineare, a sinistra di pendenza –1, a destra di pendenza 1.

Il calcolo delle derivate è concettualmente semplice ma può essere un po' macchinoso. In molti casi può essere comodo avvalersi di qualche programma. Ecco come fare il calcolo di una derivata con *WolframAlpha* (per esemplificare abbiamo messo un caso semplice, che occorre saper affrontare "a mano"!):

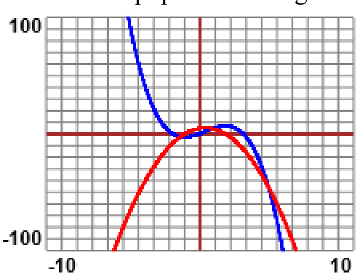
```
d(x^2-6*x+1/7) / dx      ->      2*(x - 3)
```

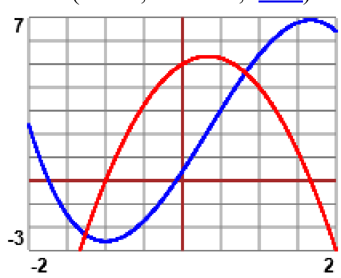
Il calcolo delle derivate ci aiuta a tracciare a mano il **grafico** di una funzione e ad individuarne alcuni punti caratteristici. Poniamoci il problema di rappresentare $F: x \to x^2-6\cdot x+1/7$. Calcolando la derivata prima studio come varia la funzione.
$F'(x) = 2\cdot x-6$. $F'(x) > 0$ (F cresce) per $2x > 6$, ossia per $x > 3$. $F'(x) < 0$ (F decresce) per $x < 3$. $F'(x) = 0$ per $x = 3$.
Quindi in x = 3 F(x) ha il valore **minimo**, pari a $F(3) = -8.85714\ldots$



Sapendo che $ax^2+bx+c=0$ ha come soluzioni, se esistono, $-b/(2a)\pm\sqrt{(b^2-4ac)}/(2a)$, trovo che il grafico interseca l'asse delle x nelle ascisse 0.023904763… e 5.976095236… (potevo usare anche lo script **sempliciEq**).

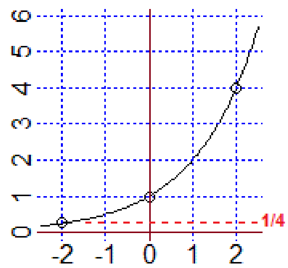
Rappresentiamo, ora, $F: x \to -x^3+x^2+5\cdot x+0.4$. $F'(x) = -3x^2+2x+5 = 0$ se $x = 2/6 \pm \sqrt{(4+60)}/6 = 1/3 \pm 4/3$, ovvero se $x = 5/3$ o $x = -1$. F è una cubica, $F(x) \to \infty$ per $x \to -\infty$, $F(x) \to -\infty$ per $x \to \infty$. Quindi in −1 c'è un minimo relativo, in 5/3 c'è un massimo relativo. Verifichiamo la cosa graficamente con lo script per tracciare grafici di funzioni (F: blu, F': rossa; vedi):





Il grafico conferma i calcoli (potremmo confermarli anche con lo script sempliciEq).

3. La derivazione delle funzioni esponenziali e logaritmiche



A lato è tracciato il grafico della funzione $x \to 2^x$ e sono evidenziati i punti che rappresentano i valori che essa associa a 0 (1), a 2 (4) e a −2 (1/4).

Ricordiamo come sono calcolati i valori corrispondenti a esponenti decimali finiti, ad es. il valore di $2^{0.4}$:

$$2^{0.4} = 2^{4/10} = 2^{2/5} = (2^2)^{1/5} = \sqrt[5]{4}$$

e, quindi, quelli corrispondenti a esponenti decimali illimitati, ad es. il valore di $P = 2^{3.151151115\ldots}$ (che con un mezzo di calcolo troveremmo valere 8.88364113…):

$$8 = 2\hat{}3 \le P \le 2\hat{}4 = 16$$
$$8.57418\ldots = 2\hat{}3.1 \le P \le 2\hat{}3.2 = 9.18958\ldots$$
$$8.87655\ldots = 2\hat{}3.15 \le P \le 2\hat{}3.16 = 8.93829\ldots$$
$$8.88271\ldots = 2\hat{}3.151 \le P \le 2\hat{}3.152 = 8.88886\ldots$$

Se ci fermassimo al secondo passo potremmo concludere che $2^{3.151151115\ldots} = 8.9 \pm 0.4$, se ci fermassimo al terzo avremmo che vale 8.91 ± 0.04, se ci fermassimo al quarto avremmo che vale 8.886 ± 0.004.

Dal grafico si capisce che la funzione cresce via via più rapidamente.

Per un esempio pensa ad una agenzia che presta ad una persona una certa somma di denaro e le chiede la restituzione della stessa somma di denaro moltiplicata per 2 ogni volta che passa un anno, o, meglio moltiplicata per 2^A dove A è il tempo trascorso in anni. Se restituisce il denaro subito lo rende non aumentato, in quanto $2^0 = 1$; se lo restituisce dopo 1 anno deve raddoppiarlo in quanto $2^1 = 2$; dopo 2 anni deve quadruplicarlo in quanto $2^2 = 4$; dopo un quarto di anno deve moltiplicarlo per $2^{1/4} = 1.189\ldots$.

Per un altro esempio pensa ad una popolazione di numerosi batteri. In opportune condizioni ciascun batterio si duplica trascorso un certo intervallo di tempo, per cui si ha che complessivamente la popolazione viene moltiplicata per 2^T, dove T è il tempo trascorso prendendo come unità di misura il tempo per la duplicazione. Se inizialmente i batteri erano 1000, trascorso il tempo 10 T essi sono $1000 \cdot 2^{10} = 1\,024\,000$.

Entrambe le situazioni sono rappresentate graficamente da curve simili a quella raffigurata sopra. Le funzioni $x \to 2^x$ e, più in generale, $\mathbf{x \to a^x}$ (con la ***base*** **a** positiva e diversa da 1) si chiamano ***esponenziali*** in quanto dipendono dal valore dell'esponente. È evidente quanto sia utile valutare la velocità con cui cresce una funzione di questo genere. Facciamolo ricorrendo alla definizione di derivata:

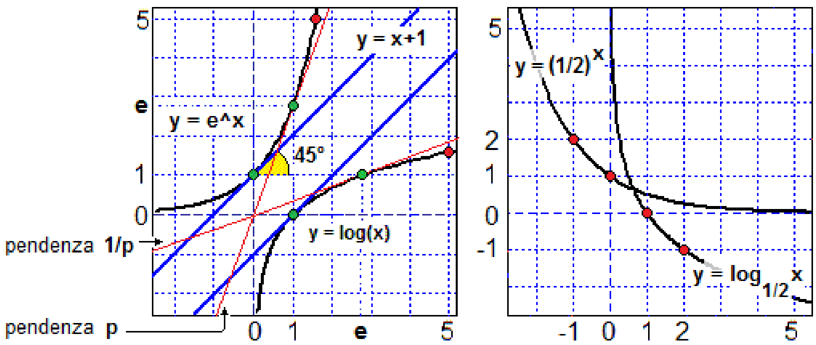
$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \left(\frac{d a^x}{dx}\right)_{x=0}$$

Dunque ho che $\mathbf{D_x(a^x) = k \cdot a^x}$ dove k è la derivata in 0.

Tra tutte le funzioni esponenziali, ha una particolare importanza quella per cui tale k (cioè la derivata in 0) è 1, ossia che ha come derivata sé stessa. Il valore della base per cui ciò accade viene indicato con ***e***, numero che viene chiamato ***numero di Nepero***. Si può trovare che: ***e* = 2.71828182845904**… (si tratta di un numero irrazionale).

Dunque $\mathbf{D_x(e^x) = e^x}$. Questa particolare funzione esponenziale, usatissima in matematica e nelle sue applicazioni, viene spesso scritta "a 1 piano" usando il simbolo **exp**, ossia scrivendo *exp(x)* al posto di e^x. Le funzioni inverse delle funzioni esponenziali si chiamano *funzioni logaritmiche.* La funzione inversa di **exp** viene indicata **log**. La figura seguente, a sinistra, richiama alcune delle caratteristiche di queste funzioni. Osserviamo, in particolare, che, in quanto exp(0) = 1, log(1) = 0.

$\mathbf{D_x \log(x) = 1/x}$. Infatti, essendo **log** ed **exp** l'una l'inversa dell'altra, nel punto (x, y) con y = log(x) la pendenza di **log** è il reciproco di quella di **exp** nel punto (y, x). La pendenza di exp(y) è exp(y) stesso, ossia exp(log(x)), ossia x. Il suo reciproco è **1/x**.



Un **trucco** comodo per passare dalla base **e** ad una generica base **a** (positiva e diversa da 1) è ricordare la proprietà delle potenze $(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2\cdot 3}$.

Si pensa ad **a** come $e^{\log(a)}$ e si scrive $a^x = (e^{\log(a)})^x = e^{\log(a)\cdot x}$. Se **a** < 1 log(**a**) < 0 e, quindi, la funzione $x \to a^x$ decresce, come nel caso sopra a destra. Anche la sua funzione inversa, indicata $\log_a$ e chiamata logaritmo in base **a**, per **a** < 1 decresce. Abbiamo $\log_a(x) = \log(x) / \log(a)$.

Prova ad usare *WolframAlpha* per calcolare:

```
d 2^x / dx,   d log(x) / dx,   d log(2,x) / dx
```

4. Infiniti e infinitesimi

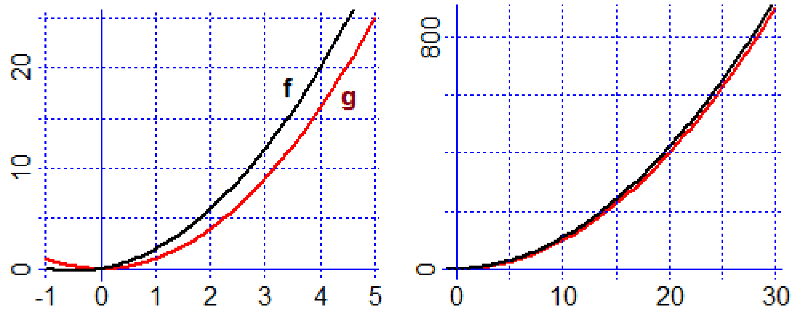
Se F(x) e G(x) sono due funzioni che per x → α (finito o infinito) tendono entrambe a 0 o a ∞, si dice che F(x) e G(x) sono ***asintoticamente uguali*** e si scrive **F(x) ≈ G(x)** quando:

$$\lim_{x \to \alpha} F(x) / G(x) = 1$$

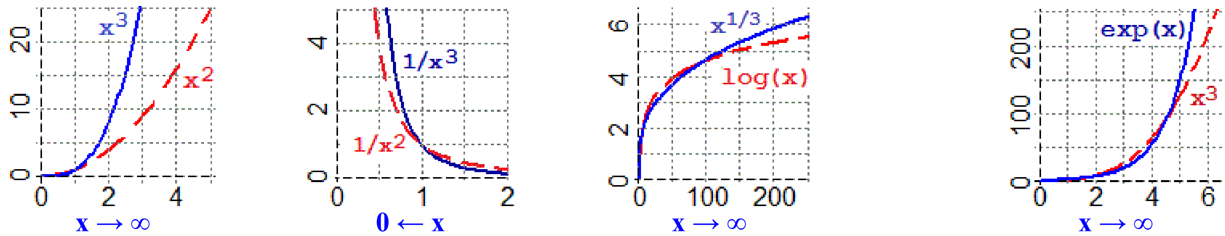
Se F(x) e G(x) per x → α sono entrambi infiniti [infinitesimi] e se per qualche costante **k** diversa da 0 F(x) ≈ **k**·G(x) si dice che F(x) e G(x) sono infiniti [infinitesimi] dello stesso ordine.

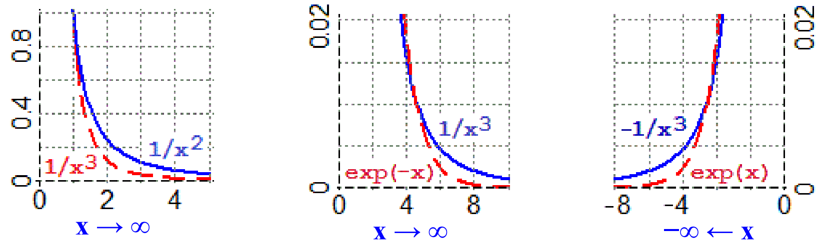
Sotto è illustrato il caso di $f(x) = x^2+x$ e $g(x) = x^2$. Per x → ∞ f(x) è un infinito asintoticamente eguale a g(x). Infatti il rapporto tra f(x) e g(x) tende ad 1:

$$\text{per } x \to \infty \quad f(x)/g(x) = (x^2+x)/x^2 = 1 + 1/x \to 1$$



Riassumiamo qui alcune relazioni particolarmente utili.



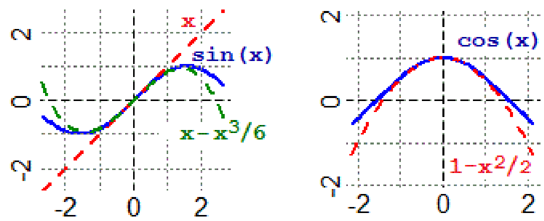


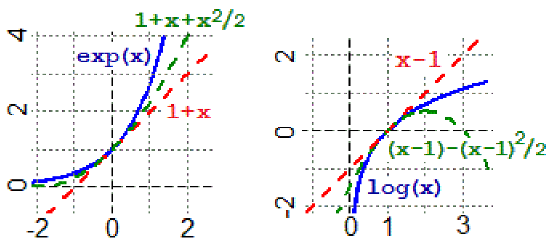
In **rosso**
gli **infiniti** ↑ o
← gli **infinitesimi**
trascurabili
(ossia gli infiniti di ordine inferiore,
gli infinitesimi di ord. superiore)

Per **x → 0**

sin(x) ≈ x ovvero:
sin(x) ≈ $x - x^3/6$

cos(x) ≈ $1 - x^2/2$





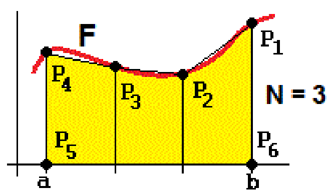
Per **x → 0**
exp(x) ≈ 1 + x ovvero:
exp(x) ≈ $1 + x + x^2/2$
Per **x → 1**
log(x) ≈ x − 1 ovvero:
log(x) ≈ $x-1 - (x-1)^2/2$

5. L'integrazione, ed altro.

Come calcolare l'area che sta tra una curva e l'asse x? Se sappiamo descrivere la curva come il grafico di una funzione F per gli input compresi tra due valori **a** e **b**, quest'area si chiama ***integrale di F tra a e b***. L'area può essere calcolata approssimando la curva con una poligonale: all'aumentare del numero dei lati di questa si ha una valutazione via via più precisa.

Quando di riesce a trovare una funzione G che ha per derivata F si può ottenere una valutazione esatta dell'area calcolando G(**b**)−G(**a**).

Trovi sintetizzati ed esemplificati questi concetti nel *paragrafo 5* di una prossima scheda di [Complementi di Analisi Matematica].



Abbiamo anche visto che ***D(sin) = cos*** e che ***D(cos) = sin*** . Per la revisione di questi ed altri concetti di *trigonometria* rinviamo al "riassunto" effettuato nella scheda [Funzioni trigonometriche e funzioni periodiche].

6. Esercizi [*Vai qui*].