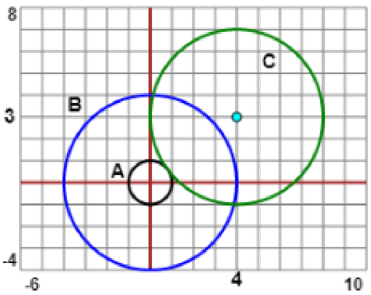
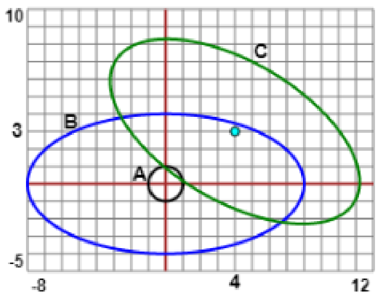
Le coniche

1. Richiami

Sotto a sinistra **C** è il ***cerchio*** di centro (4,3) e di raggio 4, che, come sappiamo, posso descrivere con l'equazione {P : d(P, (4,3)) = 4}, ovvero {(x,y) : $(x-4)^2+(y-3)^2 = 16$}.

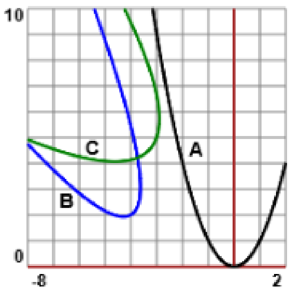
Tutti i cerchi sono ottenibili anche dal cerchio **A** di centro (0,0) e raggio 1, che ha equazione $x^2+y^2 = 1$, mediante similitudini, cioè componendo trasformazioni di scala monometriche e movimenti piani. Ad es. il cerchio precedente posso ottenerlo trasformando **A** mediante la similitudine ottenuta componendo la trasformazione di scala (monometrica) con moltiplicatore 4 (**A** → **B**) e la traslazione $T_{4,3}$ (**B** → **C**).

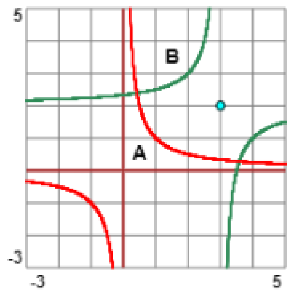


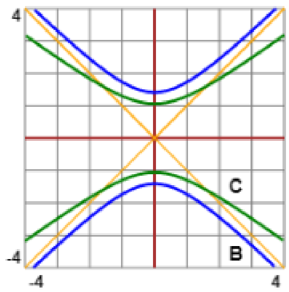


Invece le figure ottenibili dal cerchio $x^2+y^2 = 1$ componendo trasformazioni di scala anche non monometriche e movimenti piani vengono chiamate ***ellissi***. L'ellisse **C** raffigurata sopra a destra è ottenibile dal cerchio **A** componendo la trasformazione di scala (x,y) → (8x,4y) (→ **B**) e un movimento piano (rotazione di −30° attorno a (0,0) e traslazione di passi Δx=4 e Δy=3).

Le figure di equazione $y = a\,x^2$ (a numero reale diverso da 0) e tutte quelle ottenibili da esse mediante movimenti piani e trasformazioni di scala anche non monometriche vengono chiamate ***parabole***. Sotto a sinistra è raffigurata la parabola (A) di equazione $y = x^2$, quella (B) ottenuta da essa mediante la rotazione di 30° attorno a (0,0) e la traslazione di passi Δx=−4 e Δy=2, e quella (C) ottenuta con la rotazione di 60° attorno a (0,0), la traslazione di passi Δx=−2 e Δy=2 e la trasformazione di scala (x,y) → (1.5·x, 2.5·y)

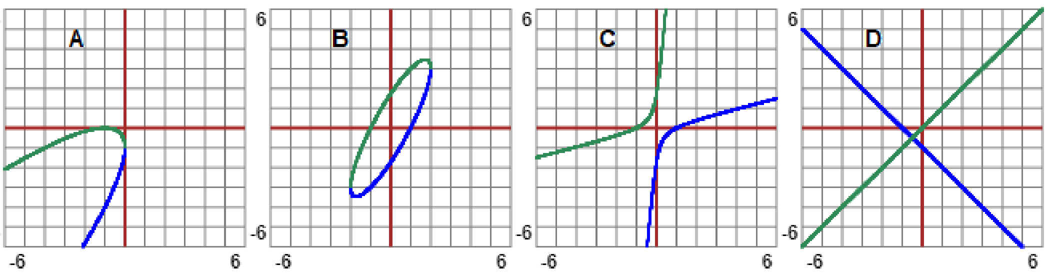




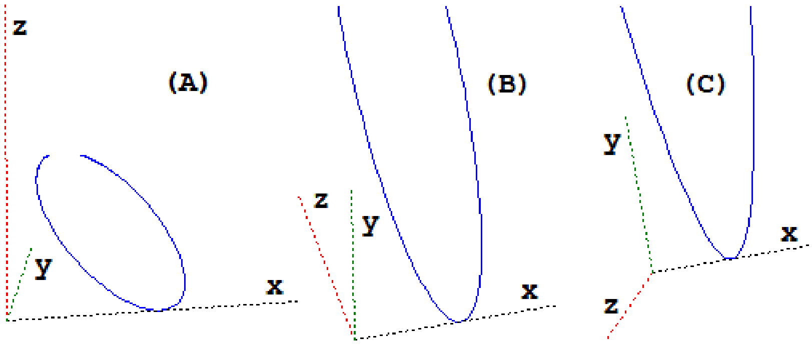


Le figure di equazione $y = a\,/\,x$, ovvero $x \cdot y = a$ (a numero reale diverso da 0), e tutte quelle ottenibili da esse mediante movimenti piani e trasformazioni di scala anche non monometriche, vengono chiamate ***iperboli***. Sopra al centro è raffigurata l'iperbole (A) di equazione y=1/x e quella (B) ottenuta da essa mediante la rotazione di 90° attorno a (0,0) e la traslazione di passi Δx=3 e Δy=2. A destra B è l'iperbole equilatera ottenuta ruotando di 45° l'iperbole y=1/x mentre C è l'iperbole (non equilatera) ottenuta applicando anche una moltiplicazione per 75% delle y. **Qui**, se vuoi, puoi trovare gli script con cui realizzare le precedenti immagini.

$\boxed{1}$ Associa a ciascuna delle equazioni seguenti il corrispondente grafico nel piano x,y.
Aiutati con **www.wolframalpha.com** [introduci come input ***`x^2+y^2-2*y*x+2*y+2*x+1=0,`*** ecc.]:
$x^2+y^2-2yx+2y+2x+1 = 0$ $\quad$ $x^2-y^2+x-y = 0$
$x^2-xy+y^2/3 = 1$ $\quad$ $x^2-4xy+y^2/3 = 1$

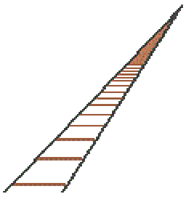


Come vedremo meglio fra poco, tutte le coniche sono descrivibili nel piano x,y come grafici di particolari equazioni polinomiali di 2° grado in x ed y. Ma ciò che le accomuna particolarmente è il fatto, a cui abbiamo già accennato (➡ *La prospettiva*), che le rappresentazioni prospettiche non permettono di distinguere una parabola da una ellisse o da un'iperbole. Abbiamo ad esempio osservato (vedi l'illustrazione seguente) come la parabola $y = (x-5)^2$ nel piano xy osservata da diversi punti di vista possa sembrare un'ellisse: nel caso (C), con un punto di vista inclinato 90° rispetto al piano xy, appare come una parabola, negli altri, inclinati di 60° (B) e di 1° (A), appare come un'ellisse (le porzioni di assi tracciate sono lunghe 10).



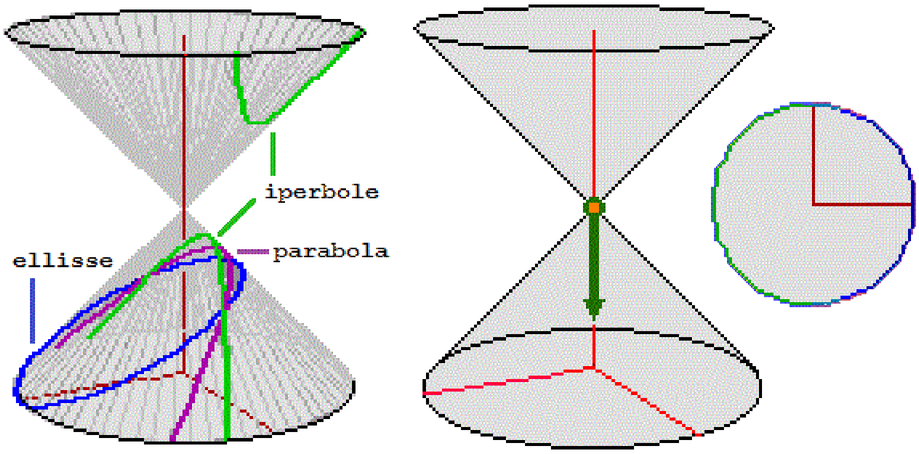
2. Le sezioni di un cono

Le apparenti stranezze dell'immagine precedente non dovrebbero stupire: abbiamo già visto, ad esempio, che le rotaie di un binario collocato in un piano, pur essendo parallele e non incontrandosi mai, alla nostra vista appaiono convergere in un punto.



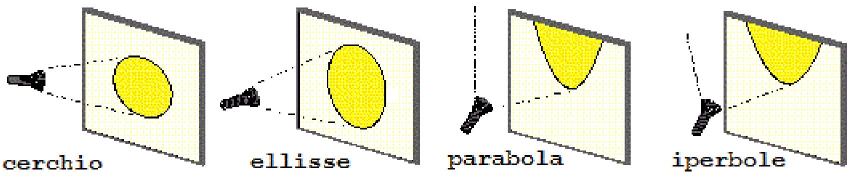
Per capire meglio immaginiamo di tagliare un ***cono*** circolare retto (avente come asse di simmetria l'asse z) con un piano che abbia inclinazione rispetto al piano z = 0 maggiore, minore od uguale a quella delle generatrici del cono (ricordiamo che viene chiamata *generatrice* del cono una retta che passa per il vertice di esso e sta sulla superficie di esso; il suo nome deriva dal fatto che una sua rotazione attorno all'asse del cono genera il cono stesso).

Nel primo caso ottengo un'iperbole, nel secondo un'ellisse, nel terzo una parabola. ***Ma*** se guardo queste intersezioni dal vertice del cono, dirigendo lo sguardo come l'asse di rotazione, le vedo tutte circolari o, meglio, come un cerchio (l'ellisse) o un cerchio bucato (la parabola) o un arco di cerchio (l'iperbole).



Il fatto che ellissi, iperboli e parabole possono essere ottenute dalla intersezione di un cono con un piano è all'origine del fatto che tali curve vengono chiamate, complessivamente, ***coniche.*** Cliccando **qui** puoi studiare meglio il fenomeno.

Ciò che abbiamo visto sopra può essere esaminato anche in altro modo: proiettando un fascio di luce conico su una superficie piana, al buio, posso vedere che, a seconda della inclinazione di questa, si ottiene una ellisse (o in particolare un cerchio), una parabola o un ramo di iperbole:



$\boxed{2}$ Se taglio il cono con un piano passante per il vertice del cono stesso, che intersezioni ottengo al variare dell'inclinazione del piano?

3. Le equazioni polinomiali delle coniche

Le coniche possono essere tutte ottenute, nel piano x,y, come grafico di una equazione polinomiale di 2° grado, ossia di un'equazione in x ed y del tipo $a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x{\cdot}y + c{\cdot}y^2 + d{\cdot}x + e{\cdot}y + f = 0$ (affinché sia di 2° grado occorre che *a, b* e *c* non siano tutti nulli).

Un'equazione di questo genere ha alcuni casi "degeneri":
• casi in cui non ha "punti" (x,y) che la risolvono (ad es. $x^2+y^2+1=0$),
• o ha per soluzione solo un punto (ad es. $x^2+y^2=0$, soddisfatta solo se x=0 e y=0)
• o una retta (ad es. $(x-y)^2=0$, soddisfatta solo se y=x)
• o una coppia di rette (ad es. $x^2-y^2=0$, soddisfatta solo se y=x o y=−x).

Negli altri casi rappresenta un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

Si può dimostrare che la classificazione in queste tre categorie dipende solo dai valori di *a, b* e *c*. Vediamo la casistica:

- se $b^2-4ac = 0$ è una parabola,
- se $b^2-4ac > 0$ è una iperbole,
- se $b^2-4ac < 0$ è una ellisse.

Naturalmente ciò non vale nei casi degeneri (in cui le tre curve, in ordine, diventano una retta, come nel caso di $x^2+y^2-2xy=0$, una coppia di rette, come nel caso di $x^2-y^2=0$, o un punto o l'insieme vuoto, come nel caso di $x^2+y^2=0$ e di $x^2+y^2+1=0$).

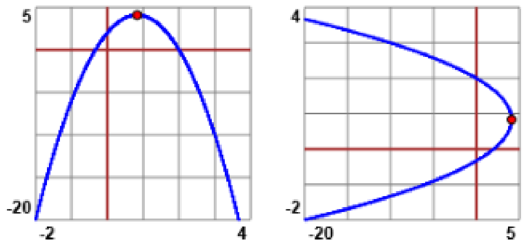
Ecco l'associazione ai grafici delle equazioni considerate nel **quesito 1**:

A: $x^2+y^2-2yx+2y+2x+1 = 0$, **B**: $x^2-xy+y^2/3 = 1$, **C**: $x^2-4xy+y^2/3 = 1$, **D**: $x^2-y^2+x-y = 0$

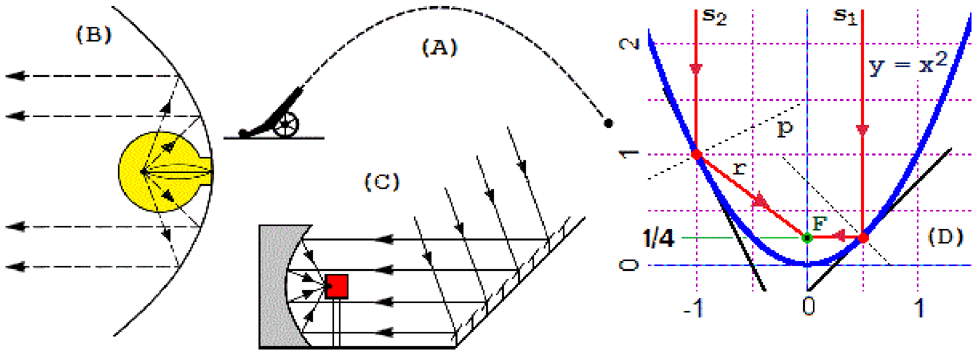
3 Indicando con $a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$ una generica curva polinomiale di 2° grado, calcola b^2-4ac per ogni curva considerata sopra.

4. Le parabole

Conosciamo, ormai, abbastanza bene le parabole con asse di simmetria verticale, e conosciamo, di conseguenza, anche quelle con asse di simmetria orizzontale. Sappiamo individuarne il vertice, sappiamo che forma ha il loro grafico. Ad esempio a destra è raffigurata la parabola $y = -3x^2+5x+2$. Essendo il coefficiente direttivo negativo sappiamo che tende a $-\infty$ per x che tende a ∞ e per x che tende a $-\infty$. Il vertice ha come ascissa il valore in cui si annulla la derivata: $-6x+5=0$ quando $x = 5/6 = 0.8333\ldots$. La parabola $x = -3y^2+5y+2$ è la stessa curva ribaltata rispetto alla bisettrice del primo quadrante, y=x. La ordinata del suo vertice è 5/6. La ascissa è $-3(5/6)^2+5\cdot 5/6+2 = 4.0833\ldots$.



La figura seguente illustra alcuni impieghi delle parabole. In **(A)** è illustrato il moto di un particolare proiettile: c'è una componente orizzontale x(t), che suppongo avere velocità costante (essendo trascurabile l'attrito) pari a $x(t) = 120\cdot t$ (esprimendo lo spazio in metri e il tempo in secondi), e una componente verticale pari a $y(t) = 150\cdot t-4.9\cdot t^2$. Ricavando t in funzione di x posso ottenere che la traiettoria è la parabola $y = -x^2/2940+5/4\cdot x$ (x ed y espressi in metri). L'uso delle parabole per modellizzare il moto dei proiettili (e di tutti gli oggetti lanciati in aria), che dovresti già conoscere, risale circa al 1600, ed è essenzialmente dovuto a Galileo Galilei. Vediamo, ora, alcuni usi più antichi e più recenti.



Risale a parecchi secoli avanti Cristo l'uso degli specchi con sezione parabolica per concentrare i raggi del sole in particolari punti. È la stessa idea - vedi **(C)** - che sta dietro a moderne forme per utilizzare l'energia solare o, viceversa, - vedi **(B)** - per trasformare la luce prodotta da una sorgente in un fascio di raggi paralleli.

Ciò che sta dietro a questi usi è spiegabile facendo riferimento alla figura **(D)**, in cui è rappresentata (in scala monometrica) la parabola $y = x^2$, alla quale posso ricondurre tutte le parabole (so infatti che le parabole, così come i cerchi e le iperboli equilatere, sono tutte **simili** tra loro - vedi Matematica e lo spazio 3):

• consideriamo la parabola $y = x^2$ e una semiretta verticale non limitata superiormente che viene ad incidere sulla parabola;
• sia **u** l'ascissa di tale retta; essa tocca la parabola nel punto ($\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^2$); la tangente in tale punto ha pendenza pari alla derivata della funzione, ossia a 2**u**;
• consideriamo ad esempio **u** = 1/2; la tangente ha pendenza 1, ossia è inclinata di 45°; quindi la semiretta **s1** viene "rimbalzata" nella semiretta di pendenza 0; essa incide la bisettrice della parabola nel punto di ordinata $\mathbf{u}^2 = \mathbf{1/4}$, ossia nel punto **F** raffigurato;
• nella figura si vede che anche nel caso **u** = −1 la semiretta **s2** viene "rimbalzata" in una semiretta **r** che incontra la bisettrice della parabola nello stesso punto di ordinata 1/4; è facile verificare che le cose stanno effettivamente così:

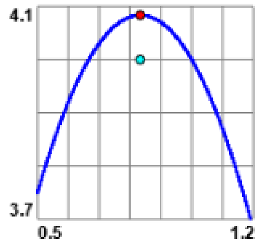
la perpendicolare **p** ha pendenza 1/2 e direzione atan(1/2), **s2** ha direzione $\pi/2$, l'angolo formato da esse, in gradi, è `90-atan(1/2)*180/PI` = 63.434948822922 (arrotondamento); verifichiamo che è uguale l'angolo formato dalla semiretta che parte dal punto di incidenza e passa per F; `atan(1/2)*180/PI-atan(-3/4)*180/PI` = 63.434948822922: OK.

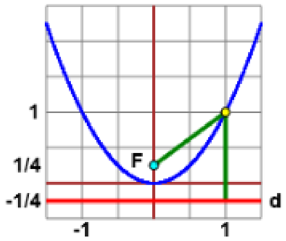
• la cosa può essere provata qualunque sia **u**, ma evitiamo di esaminarne la dimostrazione.

Il punto **F** viene chiamato ***fuoco*** della parabola. Il nome è dovuto al fatto che in esso si concentrano i raggi del sole proiettati da uno specchio parabolico con asse diretto come essi: con uno specchio parabolico è possibile appiccare il fuoco, appunto, nel "fuoco".

Qual è il fuoco della parabola $y = \mathbf{a}\cdot x^2$?
Essendo questa parabola simile a $y = x^2$, ed essendo la trasformata di essa mediante la scala 1/**a** ($y=3\cdot x^2$ sale più velocemente, ed ha il grafico ristretto ad 1/3 delle dimensioni originali), il suo fuoco ha ordinata **1/(4·a)**.

4 Trova il fuoco della parabola y = −3x²+5x+2 considerata all'inizio del paragrafo.

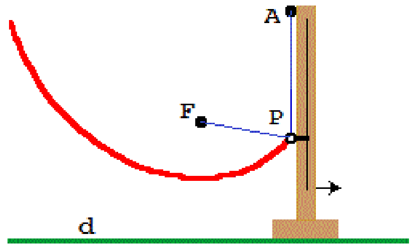




Vediamo un altro modo con cui posso descrivere le parabole: una parabola è l'insieme dei punti equidistanti dal suo fuoco e dalla retta perpendicolare all'asse di simmetria della parabola tale che il vertice sia equidistante tra essa e il fuoco stesso. Tale retta viene chiamata ***direttrice*** della parabola.

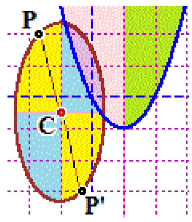
Riferendoci alla figura a lato (in cui è rappresentata la parabola "standard", $y = x^2$) è l'insieme dei punti **P** tali che d(**F**,**P**) = d(**P**,**d**), se **d** è la direttrice.

5 Descrivi come, secondo te, funziona il dispositivo a fianco, in cui l'anello P descrive una parabola (**qui** puoi vedere un'animazione).



6 Qual è l'equazione della parabola avente il punto (0,1) come fuoco e la retta y = −1 come direttrice?
E quella della parabola avente il punto (1,0) come fuoco e la retta x = −1 come direttrice?

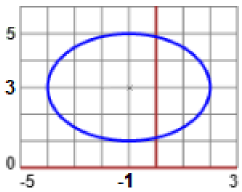
5. Le ellissi



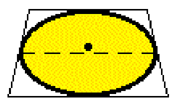
Le parabole hanno un unico asse di simmetria. Le ellissi ne hanno invece due, tranne i cerchi, che ne hanno infiniti: ogni retta passante per il centro.

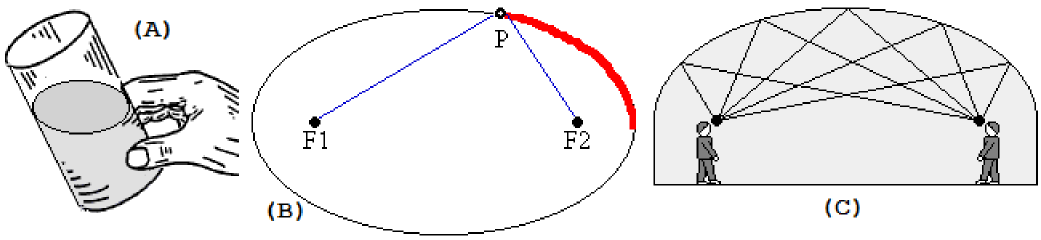
L'intersezione C degli assi di simmetria di una ellisse è anche il suo centro di simmetria: se P sta sulla ellisse ci sta anche il punto P' tale che C è il centro del segmento PP'.

Ricordiamo che possiamo descrivere direttamente le ellissi in forma parametrica (vedi la scheda Funzioni circolari). Ecco sotto a sinistra l'ellisse $x = -1+3\cdot\cos(t)$, $y = 3+2\cdot\sin(t)$, al variare di t tra 0 e 2π.



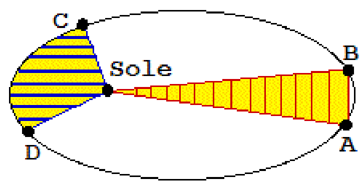
Sotto sono illustrate altre situazioni modellizzabili usando le ellissi. In **(A)** è rappresentata la superficie di un liquido in un cilindro non in posizione verticale. Un aspetto simile ha un anello visto con lo sguardo non perpendicolare al piano in cui esso sta. A destra un'immagine che ricorda che il centro dell'anello non è al centro dell'ellisse, infatti la sua distanza dal bordo dell'anello a noi più lontano appare minore di quella dal bordo più vicino (vedi la scheda La prospettiva).

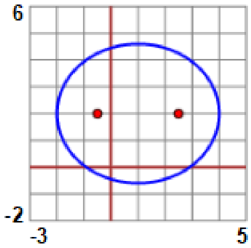




In **(B)** e in **(C)** sono richiamati altri impieghi. In (B) è illustrato il tracciamento di una aiuola facendo scorrere un gesso lungo una corda di cui sono fissati i capi; i punti in cui sono fissati i capi vengono chiamati ***fuochi*** della ellisse. È evidente che è una generalizzazione del tracciamento di un cerchio, ottenuto quando i due capi sono collocati nello stesso punto; questo uso era già diffuso migliaia di anni fa. In (C) un impiego successivo, noto da qualche centinaio d'anni: due persone poste nei fuochi dell'ellisse che dà forma al soffitto possono parlare sottovoce e sentirsi in quanto le onde sonore vengono riflesse da un fuoco all'altro (**qui** puoi vedere un'animazione).

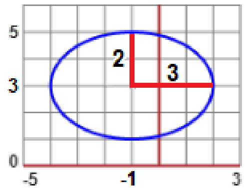
A destra viene ricordato un successivo impiego delle ellissi (dovuto a Keplero, agli inizi del XVII secolo): la descrizione del movimento dei pianeti. I pianeti si muovono lungo un'ellisse con il sole collocato in uno dei due fuochi. Inoltre, fissato un intervallo di tempo **t**, la parte di piano spazzata nel tempo **t** dal segmento che congiunge il sole e il pianeta ha area costante, indipendentemente dalla posizione.





7 L'ellisse a sinistra ha (-0.5,2) e (2.5,2) come fuochi ed è larga 6. Quanto è alta?

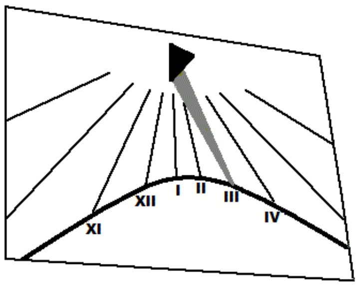
Per generalizzare il concetto di ***raggio*** di un cerchio, nel caso di una ellisse non circolare si chiamano ***semiasse maggiore*** e ***semiasse minore*** le lunghezze dei segmenti che congiungono il centro dell'ellisse e l'ellisse stessa lungo, rispettivamente, la retta passante per i fuochi (3, nella figura a destra) e lungo la perpedicolare ad essa (2, nella figura).

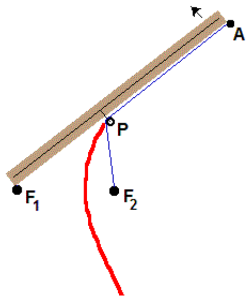


6. Le iperboli

Le iperboli equilatere con asintoti orizzontali e verticali le abbiamo utilizzate per rappresentare graficamente molte funzioni che legano grandezze di vario genere (fisiche, economiche, geometriche, …). Ma si tratta di usi relativamente recenti. Prima l'uso principale delle iperboli era quello della costruzione delle meridiane: in un dato giorno il movimento che descrive la punta di un bastone o di un'asta metallica (o un altro oggetto a punta) fissata per terra o in un muro descrive una traiettoria iperbolica.

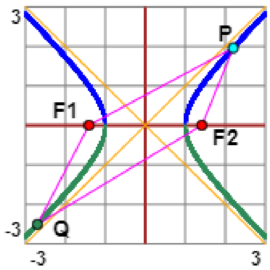
La spiegazione di questo fenomeno è da collegarsi a quanto discusso nel §2: durante un giorno, a causa della rotazione della terra su sé stessa, i raggi di sole che passano per la punta dell'asta descrivono un cono e proiettano (sul terreno o sul muro) un'ombra la cui punta descrive una conica (l'intersezione del cono con la superficie del terreno o del muro). Alla nostra latitudine questa conica è un'iperbole (vedi la figura sotto a sinistra, in cui la meridiana segna le 3); vicino ai poli è un'ellisse.



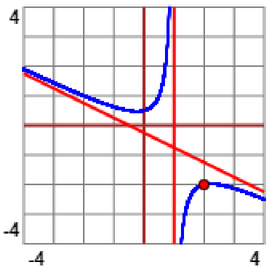


Sopra a destra è descritto un modo alternativo per tracciare una iperbole (**qui** puoi vederlo in un'animazione). L'asta ruota attorno a **F1**. Il punto **P**, che descrive la curva, è tale che se aumenta **PF1** della stessa quantità diminuisce **PF2**, ossia la differenza tra **PF1** e **PF2** è costante. In questo modo, in realtà, è tracciato solo uno dei due rami dell'iperbole.

Ecco destra il grafico dell'iperbole in cui i ***fuochi*** **F1** e **F2** sono $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$. Nel caso del punto **P** la differenza tra la distanza da **F1** e quella da **F2** è positiva. Nel caso di **Q** è invece negativa. In entrambi i casi essa, in valore assoluto, è pari al valore che ha quando **P** sta sull'asse x, ossia a 2. Gli asintoti sono le bisettrici del 1° e del 2° quadrante.

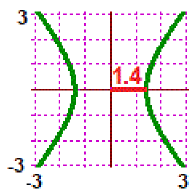


8 **(a)** Verifica col computer che la curva precedente è il grafico di $x^2-y^2=1$. **(b)** [facoltativo] Verifica, poi, (algebricamente) che questa equazione equivale a quella che esprime il fatto che $|d(P,F1)-d(P,F2)| = 2$



Come si fa a tracciare *l'iperbole passante per* il punto (2,-2) *avente per asintoti le rette* $x-1 = 0$ e $x+2y+1/2 = 0$? Sappiamo che il suo grafico, allontanadosi dal "centro", tende a confondersi con queste due rette, ossia, posto $g(x,y) = (x-1)\cdot(x+2y+1/2)$, con il grafico di $g(x,y) = 0$. L'iperbole cercata ha equazione $g(x,y) = k$ e passa per (-2, 2). Per trovare k devo imporre $g(2,-2) = k$, ossia $-3/2 = k$. L'iperbole dunque ha equazione $(x-1)\cdot(x+2y+1/2) = -3/2$. Possiamo esplicitare y in funzione di x: $\mathbf{y = -0.75/(x-1)-x/2-0.25}$.

Anche per le iperboli, sempre con qualche analogia col concetto di *raggio* di un cerchio, si usa il termine ***semiasse maggiore***. Esso indica la distanza dell'iperbole dal suo centro. A fianco è raffigurata un'iperbole con semiasse maggiore 1.4.



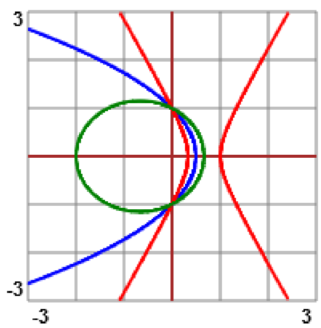
7. Approfondimenti

C'è un modo alternativo per descrivere le coniche, mediante un'unica rappresentazione in coordinate polari dipendente da un parametro, maggiore o eguale a 0, che noteremo con la lettera ***e***, chiamato ***eccentricità***: $\rho = 1/(1+\mathbf{e}\cdot\cos(\theta))$.

A seconda del suo valore (maggiore, minore o eguale ad 1), si ha una iperbole, un'ellisse o una parabola (quando è 0 si ha un cerchio):

Per eventuali approfondimenti cerca "eccentricity" in **www.WolframAlpha.com**: **vedi**

Ecco come ottenere la figura a lato: **coniche**.



8. *Esercizi*

e1 Che cosa rappresentano nel piano x,y le seguenti equazioni?
$x^2/2+y^2+3y-4=0$ $(2y-x)^2+3y-4=0$ $(x+2y)(x-y)+3y-4=0$;

e2 Se una parabola ha equazione $y = 3x^2+x+1$, qual è il suo fuoco? [*Traccia.* Tieni conto che un raggio verticale che incide la parabola in un punto di pendenza 1 viene riflesso orizzontalmente]

e3 Scrivere l'equazione dell'iperbole che passa per il punto (3,1) e ha per asintoti gli assi coordinati.

e4 Scrivi l'equazione dell'iperbole che passa per il punto (1,2) e ha per asintoti le rette $x+3\cdot y-1=0$ e $2\cdot x+y-1=0$.

e5 Nel piano x,y la curva $x = 3\cdot\sin(t)$, $y = -2\cdot\cos(t)$, al variare di t tra i numeri reali, che cosa è?

e6 Una particella si muove secondo le equazioni parametriche $x = 1/(t+1)$, $y = 1/(2t-1)$. Trova la pendenza della sua traiettoria in un generico punto. Cerca di tracciare la traiettoria della particella e controlla le tue soluzioni aiutandoti col computer.

e7 Determina le equazioni della:
(A) parabola con vertice in (2,4) e fuoco in (2,3)
(B) ellisse con i fuochi in (0,2) e in (0,−2) e asse maggiore lungo 6
(C) iperbole i cui due rami distano 2 e i cui due fuochi sono (0,2) e (0,−2).

e8 Traccia e stabilisci che cosa sono le curve descritte dalle equazioni in x ed y seguenti:
(A) $2x+x^2+y^2+1 = 0$ (B) $2x-y+x^2-3 = 0$ (C) $4x^2+y^2-4y = 0$

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
coniche (§2), *fuoco di una parabola* (§4), *direttrice di una parabola* (§4), *fuochi di un'ellisse* (§5), *fuochi di un'iperbole* (§6).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P IntegrPol Istogramma RandomNum IntGauss AB3dim TabFun Det3 coniche ALTRO