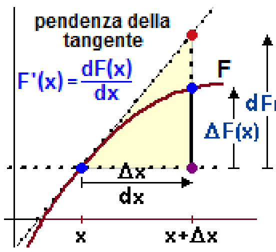
Complementi di Analisi Matematica

1. Richiami

Nei punti **1**, **2** e **3c** del "**ripasso**" trovi come rivedere, sia sintetizzati che svolti per esteso, i principali argomenti di analisi matematica affrontati finora. Trovi anche alcuni esercizi che ti consentono di controllare/ripassare le tue conoscenze. In questa scheda svilupperemo alcuni aspetti di tali argomenti. Alcune parti saranno indicate come "approfondimenti", per segnalare che saranno affrontabili solo in alcune scuole o in alcune classi.

2. Regole di derivazione



Ricordiamo che la **derivata** di una funzione F nel punto x può essere indicata $F'(x)$ o $D(F)(x)$ o $dF(x)/dx$: è la pendenza della tangente al grafico nel punto di ascissa x. Δx o dx indicano entrambi la variazione di x. Quindi **d F(x)** è la variazione che F avrebbe se a partire dal punto del grafico di ascissa x, variando x di dx, procedesse come la retta tangente al grafico. **ΔF(x)** indica la variazione effettiva di F.

L'approssimazione di $\Delta F(x)$ con $dF(x)$ è tanto migliore quanto più Δx è piccolo. L'errore di questa approssimazione – ossia la distanza tra il pallino blu a destra, che rappresenta $F(x)+\Delta F(x)$, e quello rosso soprastante, che rappresenta $F(x)+dF(x)$ – tende a 0 più velocemente di Δx, ossia è un infinitesimo "trascurabile" rispetto a Δx.

Da questo significato geometrico, come abbiamo visto **qui**, si ha che $\mathbf{d\,k\cdot f(x)/dx = k\cdot d\,f(x)/dx}$, ovvero $\mathbf{D(k\,f) = k\,D(f)}$, e che $\mathbf{d\,f(x)+g(x)/dx = d\,f(x)/dx + d\,g(x)/dx}$, ovvero $\mathbf{D(f+g) = D(f)+D(g)}$.

Esempi: $d4\cdot x^2/dx = 4\cdot dx^2/dx = 4\cdot 2\cdot x = 8x$; $dx^2+x^3/dx = dx^2/dx + dx^3/dx = 2\cdot x + 3\cdot x^2$.

Abbiamo visto anche le derivate di vari tipi di funzioni.

1 A mano, e controllando i calcoli con *WolframAlpha*, trova le derivate delle seguenti funzioni.

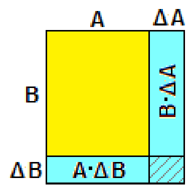
```
f: x -> x^6;     g: x -> x^-6;   h:x -> exp(x);    k: x -> x^6-x
l: x -> log(x);  m: x -> 2^x;    n: x -> sin(x);   o: x -> cos(x)
```

[con ***WolframAlpha*** batti **`dx^6/dx`**, ...]

Rivediamo alcune altre proprietà molto utili.

Che relazione c'è tra la pendenza di una funzione e quelle delle funzioni di cui è il **prodotto**? È il prodotto di esse? Per controllare facciamo un esempio particolarmente semplice:

$f(x) = x$, $g(x) = x$, $h(x) = f(x)\cdot g(x) = x^2$, $d\,f(x)/dx \cdot d\,g(x)/dx = 1$ mentre $d\,h(x)/dx = 2x$.



La risposta è: **no**. Del resto se A varia di ΔA e B varia di ΔB, $A\cdot B$ non varia di $\Delta A\cdot\Delta B$, ma, circa, di $A\cdot\Delta B+B\cdot\Delta A$, come si vede nella figura a fianco.

Analogamente abbiamo:

$\mathbf{D(f\cdot g) = D(f)\cdot g + g\cdot D(f)}$ ovvero: $\mathbf{D_x(f(x)g(x))} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Vediamo se le cose tornano nell'esempio precedente: $g(x)\cdot d\,f(x)/dx+f(x)\cdot d\,f(x)/dx = x\cdot 1+x\cdot 1 = 2x$. OK

Approfondimento: dimostriamo la proprietà precedente.

Utilizzo il fatto che $F(x+\Delta x)$ è pari a $F(x)+dF(x)+o(\Delta x)$, ossia a $F(x)+F'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$:

$D_x(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x\to 0} (f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x))/\Delta x$.
$f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) =$
$(f(x) + f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x))\,(g(x) + g'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x)) =$
$f(x)\cdot g(x) + f'(x)g(x)\cdot\Delta x + f(x)g'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x) =$
$f(x)\cdot g(x) + (\, f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,)\,\Delta x + o(\Delta x)$ Sostituendo e semplificando:
$D_x(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + \lim_{\Delta x\to 0} o(\Delta x)/\Delta x$

dove il limite finale è 0 in quanto $o(\Delta x)$ indica un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx.

2 Calcola la derivata rispetto ad x di $(x^2-7x+2)(x-7)$ sia sviluppando prima il prodotto che usando la regola ora vista.

3 Prova a mettere in *WolframAlpha* **d(f(x)/g(x))/dx**. Che cosa ottieni?

Per il **rapporto** tra due funzioni ho che:

$\mathbf{D(f/g) = (D(f)\cdot g - f\cdot D(g)) / g^2}$ ovvero: $\mathbf{D_x(f(x)/g(x))} = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) / g(x)^2$

Approfondimento: dimostriamo la proprietà precedente.

Ci conviene prima trovare $D_x(1/g(x))$ e poi utilizzare la regola del prodotto per calcolare $D_x(f(x)\cdot 1/g(x))$.

Osservo che $D_x(1/g(x)\cdot g(x)) = D_x(1) = 0$ essendo 1 una costante. Del resto per la regola della derivata del prodotto $D_x(1/g(x)\cdot g(x)) =$

$D_x(1/g(x))\cdot g(x)+1/g(x)\cdot D_x(g(x))$. Quindi $D_x(1/g(x)) = -D_x(g(x))/g(x)^2$.

Dunque $D_x(f(x)\cdot 1/g(x)) = D_x(f(x))\cdot 1/g(x) + f(x)\cdot D_x(1/g(x)) = f'(x)/g(x) - f(x)\cdot g'(x)/g(x)^2 = (f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x))/g(x)^2$.

4 Dimostra che **$D(\tan) = 1/\cos^2 = 1 + \tan^2$**.

Come trovare la derivata di una **funzione composta**? È comodo pensare **$y = f(g(x))$** come **$y = f(u)$**, **$u = g(x)$** e ragionare così:

$$dy/dx = dy/du \cdot du/dx$$

Calcolo, ad es., **$D_x \exp(\sin(x))$**. Penso a $y = \exp(u)$, $u = \sin(x)$. So che $d\exp(u)/du = \exp(u)$ e che $d\sin(x)/dx = \cos(x)$.
$d\exp(\sin(x))/dx = d\exp(\sin(x))/d\sin(x) \cdot d\sin(x)/dx =$ **$\exp(\sin(x))\cdot\cos(x)$**.

In pratica nel calcolo della prima derivata ho pensato a sin(x) come se fosse una variabile.

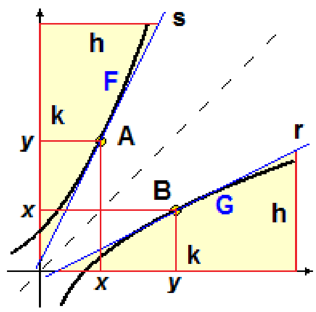
La spiegazione sopra utilizzata ($dy/dx = dy/du \cdot du/dx$) non è, invero, una dimostrazione rigorosa, ma ci consente di richiamare facilmente la formula esatta.

5 Calcola **$d\log(x^2+3x+1)/dx$**.

Nota. Abbiamo visto varie formule che riconducono il calcolo della derivata di una funzione H ottenuta a partire da due funzioni F e G al calcolo delle derivate di F e di G. Ma il fatto che non esistano D(F) o D(G) non implica che non esista D(H). Facciamo alcuni esempi.

- $f(x) = g(x) = |x|$; f e g non sono derivabili in 0 mentre f·g, che a x associa $|x|\cdot|x| = x^2$, è derivabile in 0.
- $f(x) = g(x) = |x|+1$; f e g non sono derivabili in 0 mentre f/g, che a x associa 1, lo è.
- $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$; non esiste $g'(0)$ mentre $f(g(x)) = |x|^2 = x^2$ è derivabile in 0.

Come trovare la derivata della **funzione inversa** di un'altra? Siano F e G le due funzioni. Considera la figura qui a destra, in cui supponiamo che il sistema sia monometrico. La tangente **r** al grafico di G nel punto B, rispetto alla bisettrice del primo quadrante, è simmetrica alla tangente **s** di F nel punto A (vengono scambiate ascisse e ordinate). La pendenza $\mathbf{p_r}$ di **r** e quella $\mathbf{p_s}$ di **s** sono dunque tali che $\mathbf{p_s} = 1/\mathbf{p_r}$. Riassumendo:



*se F è l'**inversa** di G*, $F'(x) = \dfrac{1}{G'(y)}$ dove $y = F(x)$

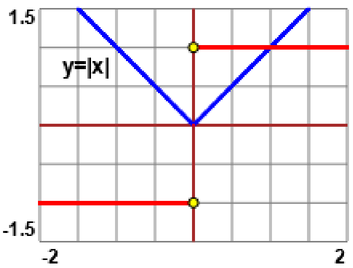
La formula precedente può essere ricordata così: **$dx/dy = 1/(dy/dx)$**, espressione che si può ricavare facilmente con una manipolazione algebrica.

Rivediamo, ad esempio, come ottenere **D(log)** sapendo che D(exp) = exp:

$$D_x(\log(x)) = 1/D_y(\exp(y)) = 1/\exp(y) = 1/x$$

6 Sia **atan** la funzione arcotangente. Dimostra che $d\,\mathrm{atan}(x)/dx = 1/(1+x^2)$.

Abbiamo usato nei vari casi notazioni diverse per indicare la derivata di una funzione. A seconda dei casi può essere più comoda ora una notazione, ora un'altra.



Osserviamo, infine, che, nel caso di una funzione F definita in un dominio contenente un intervallo (a, c], si dice ***derivata** (da) **sinistra di F in c*** l'eventuale limite finito **$\lim_{h\to 0-} (F(c+h)-F(c))/h$** (ovvero il **$\lim_{h\to 0+} (F(c)-F(c-h))/h$**), che viene indicato $D_-(F)(c)$ o $F'_-(c)$.

Se F è definita in un dominio contenente un intervallo [c, b) si dice ***derivata** (da) **destra di F in c*** l'eventuale limite finito **$\lim_{h\to 0+} (F(c+h)-F(c))/h$**, che viene indicato $D_+(F)(c)$ o $F'_+(c)$.

Ad es. di $x \to |x|$ posso dire che la derivata da destra in 0 è 1 e che quella da sinistra è −1 (non esiste quindi la derivata della funzione in 0, altrimenti le derivate da destra e da sinistra, che esistono, dovrebbero coincidere).

3. Alcuni teoremi

Richiamiamo alcuni teoremi che a volte sono utili per affrontare lo studio di alcune funzioni. Il primo è d'uso abbastanza comune, gli altri, d'uso più raro, li lasciamo negli *approfondimenti*. Il primo afferma che:

se, per $x \to \alpha$, f(x) e g(x) sono entrambe infinitesimi o entrambe infiniti, e f'(x)/g'(x) ha limite, anche f(x)/g(x) ha lo stesso limite.

Questo risultato è noto come *regola de **L'Hopital***, dal nome del francese Guillaume Francois de L'Hopital che lo enunciò, nel 1696, nel primo manuale sistematico di *analisi matematica*. Questa proprietà è abbastanza intuitiva, e la illustreremo con due esempi, rinviando a questo sito la sua dimostrazione. Si tratta di esempi che ti sono già noti. Vedi qui per richiamarli.

- $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x$. È il rapporto tra due funzioni infinitesime che so tendere ad 1. Ecco come studiarlo usando questa regola: il rapporto tra le derivate è $\cos(x)/1$ che, per $x \to 0$, tende a 1; questo è dunque anche il limite del rapporto tra le due funzioni iniziali.
- $\lim_{x\to\infty} e^x/x$. È il rapporto tra due funzioni infinite che so tendere a ∞. Il rapporto tra le derivate è $e^x/1$ che, per $x \to \infty$, tende a ∞; questo è dunque anche il limite del rapporto tra le due funzioni iniziali.

7 $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}/(1-e^{2\sqrt{x}})$ è il rapporto tra due infinitesimi. Ci si riconduce a $\lim_{t\to 0+} t/(1-e^{2t})$ ponendo $t=\sqrt{x}$. Determina questo limite sia usando l'approssimazione di exp(x) vicino a 0 con un polinomio che usando la regola de L'Hopital. Verifica la risposta con *WolframAlpha* incollandovi:

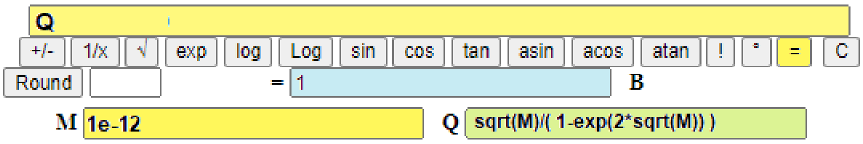
```
lim sqrt(x)/(1-exp(2*sqrt(x))) as x -> 0+
```

Occorre *non usare questa regola a sproposito*. Ad es. di fronte a $\lim_{x\to 1} (3x^2-2x-1)/(x^2-x)$, che è del tipo "0/0", uno potrebbe ricondursi a: $\lim_{x\to 1} (6x-2)/(2x-1)$, e quindi a: $\lim_{x\to 1} 6/2$ e concludere erroneamente che il limite è 3, mentre la seconda applicazione della regola de L'Hopital non è corretta in quanto $(6x-2)/(2x-1)$ non è indeterminato per $x \to 1$, ma tende a $(6-2)/(2-1) = 4$.

Tutti i limiti li posso studiare con lo script **TabFun** modificando la funzione inserita in esso. Al momento, avendo inserito `y = sqrt(x)/(1-exp(2*sqrt(x)))`, posso ottenere quanto segue, capendo che il limite per x che tende a 0 da destra è -1/2:

```
1e-1,    1e-2,   ...,   1e-12,   1e-13
-0.3584427202720018, -0.45166555661269947, ..., -0.499999499997183, -0.4999998419063888
```

Potremmo, per ogni limite, usare anche la nostra grande CT (vedi):

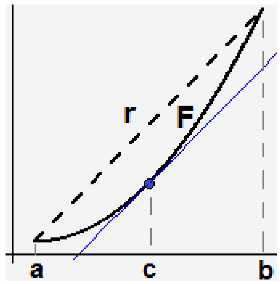



```
M = 1e-4      -0.4950166665555574
M = 1e-8      -0.4999500016665259
M = 1e-12     -0.499999499997183
M = 1e-16     -0.49999999748762036
```

Approfondimenti

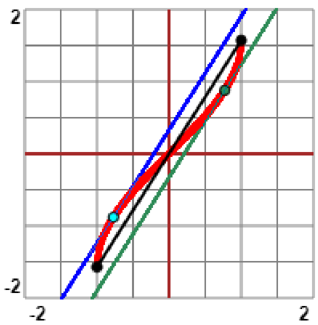
Il teorema, illustrato nella figura a fianco, afferma che:

*se una funzione F è derivabile in un intervallo (**a**,**b**) ed è continua anche nei punti **a** e **b**, allora esiste almeno un punto **c** in cui il grafico di F ha la stessa pendenza del segmento **r** che congiunge i punti del grafico di ascisse **a** e **b**.*



Esso è abbastanza intuitivo: se F(x) rappresenta la strada percorsa da un'auto nel tempo x dalla partenza e se **a** e **b** sono le ore di partenza e di arrivo dell'auto, la pendenza del segmento **r** rappresenta il rapporto tra strada percorsa e tempo impiegato, ossia la velocità media; allora ho che in almeno un istante **c** la velocità dell'auto (rappresentata dalla pendenza della tangente) eguaglia la velocità media. È pensando a tale esempio che questo teorema è stato chiamato ***del valor medio***. È chiamato anche teorema di *Lagrange* (Lagrange, 1736-1813, fu un matematico, fisico e astronomo torinese).

Una versione più debole, nota come teorema di *Rolle*, è relativa al caso in cui F(a) e F(b) sono eguali. Vedi questo sito se vuoi vedere la dimostrazione di entrambi i teoremi.



Una conseguenza del teorema del valor medio è un fatto intuitivo, che abbiamo implicitamente già usato: *una funzione F definita in un intervallo e avente in ogni punto di esso derivata nulla è costante.* Infatti presi due punti qualunque **a** e **b** ho che (F(b)−F(a))/(b−a) = F'(c) per qualche **c** tra **a** e **b**; quindi, essendo F'(c)=0, F(b) = F(a).

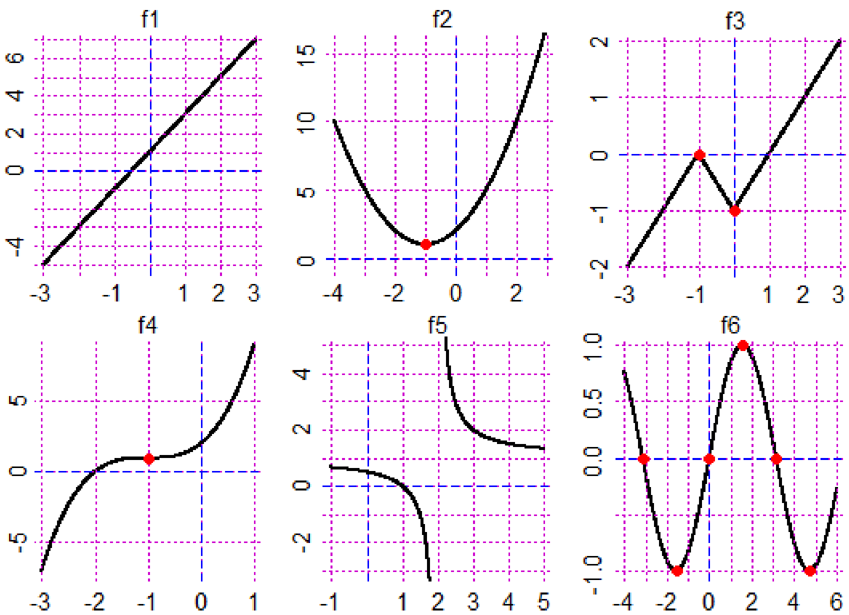
A lato è rappresentata graficamente la funzione *arcoseno*, che ha come dominio l'intervallo [−1,1] e come immagine l'intervallo [−π/2,π/2].

In questo caso vi sono due punti in cui il grafico ha la stessa pendenza del segmento che congiunge i punti estremi del grafico. Sono tracciati anche i grafici delle due rette tangenti al grafico passanti per essi.

4. Punti particolari del grafico di una funzione

Ecco i grafici di alcune funzioni, con evidenziati alcuni punti particolari:

f1: $x \to 2x+1$, **f2**: $x \to (x+1)^2+1$, **f3**: $x \to x+|x|-|x+1|$, **f4**: $x \to (x+1)^3+1$, **f5**: $x \to 1/(x-2)+1$, **f6**: $x \to \sin(x)$.



f1 ha per grafico una retta non orizzontale: non vi sono né punti di minimo né punti di massimo, né altri punti particolarmente significativi.

Invece **f2** ha, in −1, un punto di minimo in cui la derivata esiste e, obbligatoriamente, deve valere 0.

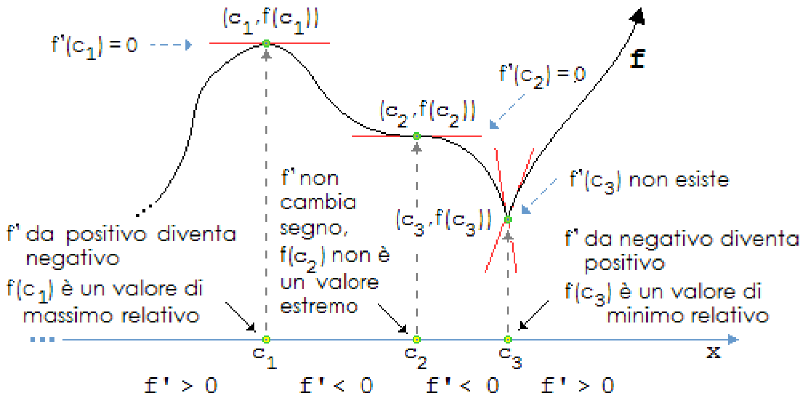
Il grafico di **f3** ha in −1, un punto di ***massimo relativo***, ossia esiste un intervallo che ha −1 al suo interno in cui **f3** non vale più di f3(−1). Analogamente in 0 ha un punto di ***minimo relativo***. Tuttavia, **f3** non è derivabile né in −1 né in 1.

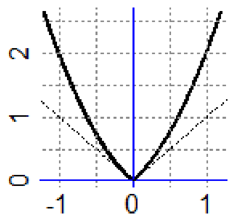
f4 in −1 ha derivata nulla ma, ivi, non ha né un minimo né un massimo. In −1 la curva cambia concavità, a sinistra è rivolta verso il basso, a destra verso l'alto. Si dice che in −1 il grafico di **f4** ha un ***flesso***.

Come **f1**, **f5** non ha punti di minimo, di massimo o di flesso. È anch'essa continua, ma il suo dominio non è tutto **R**: in 2 non è definita. Inoltre, mentre **f1** è crescente nel suo dominio, **f5** decresce in $(-\infty,2)$ e decresce in $(2,\infty)$, ma non decresce in tutto il suo dominio: $f(1) = 0$ e $f(3) = 2$.

L'ultima funzione, **f6**, che come le precedenti, ad eccezione di **f3**, è derivabile in tutto il suo dominio, a differenza di esse è periodica. Ha punti di massimo in $\pi/2$ e in tutti i valori ottenuti da questo variando di multipli di 2π, ha punti di minimo in $-\pi/2$ e in tutti i valori ottenuti da questo variando di multipli di 2π, ha punti di flesso "ascendente" in 0 e in tutti i valori ottenuti da questo variando di multipli di 2π, ed ha punti di flesso "discendente" in π e in tutti i valori ottenuti da questo variando di multipli di 2π.

L'immagine seguente sintetizza i legami tra la derivata di una funzione e la collocazione dei suoi punti di massimo e di minimo.



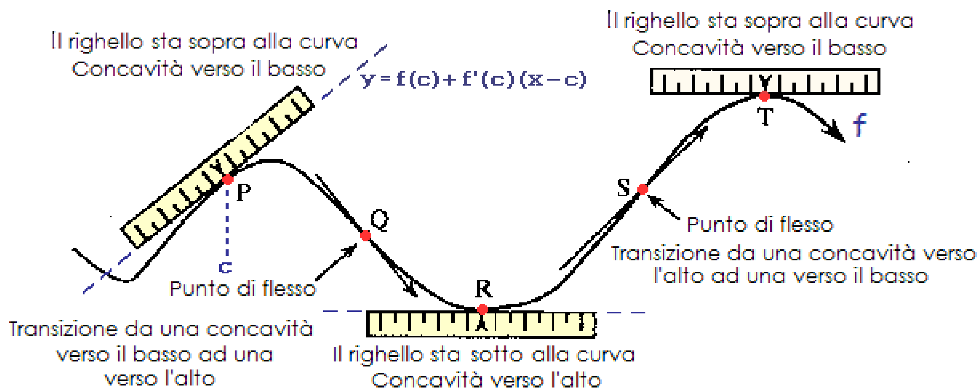


I punti ***c*** in cui D(**f**) si annulla (in essi **f** può avere un massimo o un minimo relativo, ma non è detto che ciò accada, come nel caso di c_2) vengono detti *punti critici* ed **f** viene detta *stazionaria* in essi.

A lato sono tracciati il grafico di F: $x \to |x| + x^2$ e, tratteggiato, quello di G: $x \to |x|$.

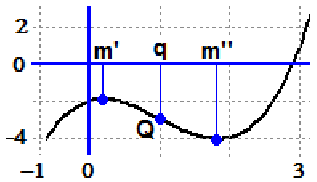
$\boxed{8}$ Dimostra che 0 è un punto di minimo di F e che in 0 F non è derivabile.

In situazioni in cui sia facile studiare le derivate successive di una funzione può essere utile ricorrere all'analisi di queste per studiare la collocazione dei punti di massimo e di minimo. Per affrontare questo argomento è bene mettere meglio prima a punto il concetto di concavità di una funzione.



La funzione **f3**, considerata sopra, in −1 ha la concavità verso il basso senza essere ivi derivabile.

È intuitivo che *se una funzione **f** ammette derivata seconda **f''** in **c** allora il grafico di **f** è strettamente concavo verso l'alto in (c, **f(c)**) se **f''(c)** > 0* e che *il grafico di **f** è strettamente concavo verso il basso in (c, **f(c)**) se **f''(c)** < 0*. Basti pensare al fatto che il segno della derivata seconda, **f''**, esprime la crescita o la decrescita della pendenza di **f**. Del resto la derivata seconda di una funzione che ha per grafico una parabola ha lo stesso segno del coefficiente direttivo, che determina se la concavità della parabola è all'insù o all'ingiù.



Per un altro esempio si pensi a **f**: $x \to x^3 - 3x^2 + x - 2$. Determino dove il suo grafico ha la concavità verso l'alto e dove verso il basso. Capisco che il cambio di concavità avviene in un punto **Q** la cui ascissa **q** vale circa 1. Poiché la funzione è facilmente derivabile due volte, posso usare quanto osservato sopra: $f''(x) = 6(x-1)$, dunque $f''(x) > 0$ se $x > 1$ e $f''(x) < 0$ se $x < 1$. Quindi **f** ha grafico con concavità verso l'alto nei punti di ascissa maggiore di 1 e verso il basso in quelli con ascissa minore di 1. Dunque 1 è il valore esatto di **q**. **Q** è un *punto di flesso*.

Più in generale ho che *se D(f) esiste (tranne eventualmente che in c) e **f''** ha segni diversi a sinistra e a destra di c, allora (c, **f(c)**) è un punto di flesso, e se **f''(c)** esiste allora **f''(c)** = 0.*

Nel caso precedente ho che $\mathbf{f}'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0$ per $x = 1 - 2\sqrt{6}/6$ e per $x = 1 + 2\sqrt{6}/6$, e che in tali punti (indicati **m'** e **m''** nella figura) **f** ha un massimo e un minimo relativi. Ma avrei potuto concludere qual è il massimo e quale il minimo studiando il segno di **f''**:

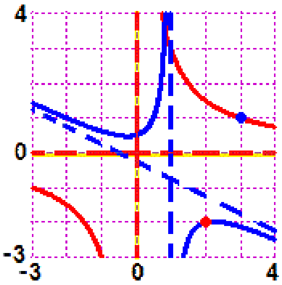
*se **f'(c)** = 0, **f'** esiste in un intorno di c e **f''(c)** esiste, allora **f** ha un massimo relativo in c se **f''(c)** < 0,*
*un minimo relativo se **f''(c)** > 0, non si può concludere nulla se **f''(c)** = 0.*

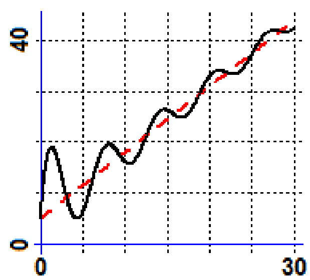
Evitiamo, qui, di provare queste proprietà, di cui è facile convincersi, ma che non sono di banale dimostrazione.

Nota. Per indicare la derivata seconda di **f**, oltre che **f"** si usano anche $\mathbf{f^{(2)}}$ e $\mathbf{D^2(f)}$.

$\boxed{9}$ Data la funzione $x \to x^4 - 2x^3 + 7x - 5$, studiane l'andamento, compresa la concavità, eventualmente trovando alcuni valori (zeri o punti di massimo o minimo o …) in forma approssimata.

Infine, le due figure seguenti richiamano il concetto di ***asintoto***, già incontrato più volte:





L'iperbole rossa a sinistra ha come asintoti i due assi. È evidenziato con un pallino il punto di ascissa 3 e ordinata 1; man mano che esso si sposta verso destra la sua distanza dall'asse x tende a 0. L'iperbole blu ha come asintoti un'altra retta verticale e una retta inclinata. Gli asintoti sono le rette tratteggiate. Un *asintoto* di una curva è una retta tale che la distanza tra un punto su di essa e la curva "tende a 0" all'avanzare del punto lungo una delle due direzioni della retta. A destra è tracciato l'asintoto di un'altra curva; in questo caso la curva attraversa infinite volte l'asintoto su cui tende a spiaccicarsi. Questo esempio mette in luce che la distanza della curva dall'asintoto tende a 0 non necessariamente con andamento decrescente.

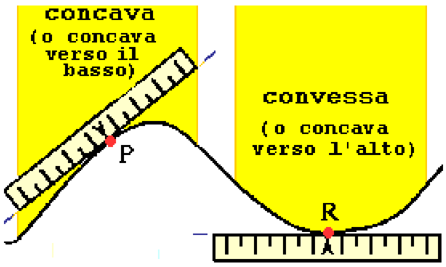
Approfondimenti.

Il grafico di una funzione continua ha la ***concavità verso il basso*** attorno al punto ($\boldsymbol{c}$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{c})$) se – vedi figura precedente – attorno ad esso (ossia per valori della ascissa che stanno in un intervallo che ha al suo interno $\boldsymbol{c}$) il grafico di **f** sta al di sotto o coincide con una retta passante per tale punto. Quando la funzione è derivabile, ciò accade se il grafico di **f** sta al di sotto o coincide con la retta tangente alla curva in tale punto, ossia se, per x abbastanza vicino a c, $f(x) \le f(\boldsymbol{c})+D(f)(\boldsymbol{c})(x-\boldsymbol{c})$. Infatti tale tangente ha equazione $y = f(\boldsymbol{c})+D(f)(\boldsymbol{c})(x-\boldsymbol{c})$.

Analogamente, **f** ha la ***concavità verso l'alto*** attorno a un punto – come il punto R nella figura precedente – se il grafico di **f** sta al di sopra o coincide con una retta passante per tale punto. Ossia, quando la funzione sia derivabile, indicata con $\boldsymbol{c}$ la ascissa di esso, se, per x abbastanza vicino a $\boldsymbol{c}$, $f(x) \ge f(\boldsymbol{c})+D(f)(\boldsymbol{c})(x-\boldsymbol{c})$.

Se aggiungiamo l'avverbio ***"strettamente"*** ("… è strettamente concava …") intendiamo che la funzione intorno a $\boldsymbol{c}$ non può avere andamento rettilineo (ovvero il suo grafico può coincidere con quello della retta considerata solo nel punto di ascissa $\boldsymbol{c}$).

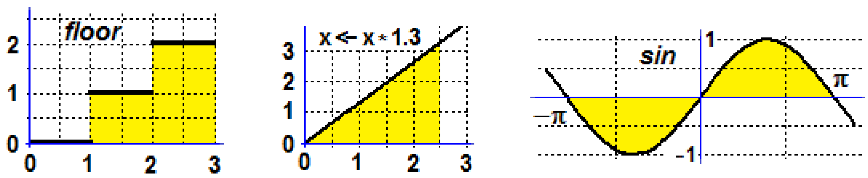
Si usano, per **f**, anche i termini "concava" e "convessa" (al posto di concava verso il basso e verso l'alto), come richiamato dalla figura a lato, pensando alle forma della figura che, intorno al punto considerato, sta al di sopra del grafico di **f**.



Si noti che la somma di due funzioni con la concavità verso l'alto (verso il basso) è una funzione con la concavità verso l'alto (verso il basso).

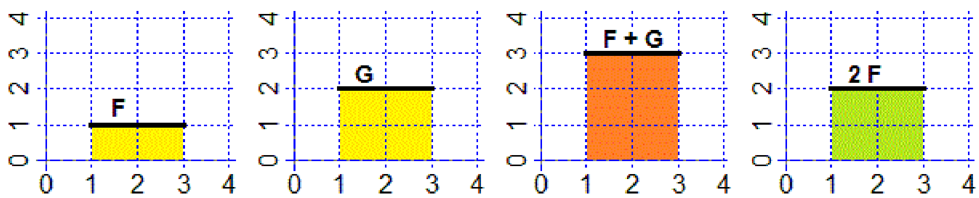
5. Richiami sull'integrazione

Ricordiamo che, dato un intervallo finito [a,b] e una funzione F che sia continua in [a,b], o che sia ivi limitata e continua in intervalli la cui unione sia [a,b], l'area orientata tra grafico di F ed asse x viene chiamata ***integrale di F tra a e b*** e indicata $\int_{[a,b]} \mathbf{F}$ o $\int_a^b \mathbf{F}$, o, per comodità, $_a\!\int^b \mathbf{F}$. Vediamo tre esempi:



Nel primo caso l'integrale tra 0 e 3 è 1+2 = 3. Nel secondo caso, essendo il triangolo alto 1.3·2.5, l'integrale tra 0 e 2.5 è 2.5·2.5·1.3/2 = 4.0625. Nel terzo caso, essendo la curva simmetrica rispetto all'origine, anche senza calcolare l'integrale tra 0 e π, posso concludere che l'integrale tra −π e π è 0.

Come per le derivate ho che: $\int_{[a,\,b]} (\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \int_{[a,\,b]} \mathbf{F} + \int_{[a,\,b]} \mathbf{G}$ $\qquad$ $\int_{[a,\,b]} (k\,\mathbf{F}) = k \int_{[a,\,b]} \mathbf{F}$

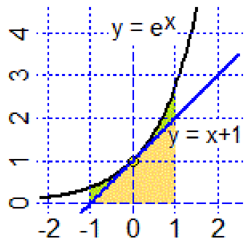


Abbiamo visto che integrazione e derivazione sono legate dalla proprietà:

Sia f *continua in* $[a, b]$*;* *se* $G' = f$ *allora* $\int_{[a,\,b]} f = G(b) - G(a)$

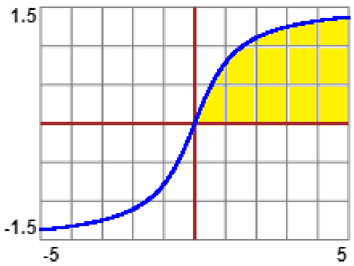
nota come ***formula fondamentale del calcolo integrale***, che ci permette di calcolare facilmente gli integrali in molte situazioni.

Facciamo un *esempio*. Dato che **D(exp) = exp** posso concludere che un'antiderivata della funzione esponenziale è la funzione esponenziale stessa. Quanto vale l'area tra il grafico di **exp** e l'asse x compresa tra le rette y = −1 e y = 1?



Per una stima posso approssimarla con l'integrale tra −1 ed 1 di x → x+1, che vale 2·2/2 = 2 (l'area del triangolo raffigurato, delimitato superiormente dalla retta y = x+1). Con precisione, posso calcolare: $\int_{[-1,1]}$ **exp** = **exp**(1)−**exp**(−1) = 2.350402.

Si è visto come, in caso di necessità, si possa ricorrere al calcolo degli integrali mediante il **software**. Ho considerato **IntegrPol** (**vedi**) e **IntGauss** (**vedi**), e considererò tra poco lo script più generale **Integral**. Ma si può usare anche *WolframAlpha*, battendo (per l'ultimo integrale) `integral exp(x) dx from -1 to 1` e ottenendo 2.3504023872876...



Considero l'integrale tra 0 e 5 di *atan* (la funzione arcotangente), cioè l'area della figura gialla a sinistra, che, posso stimare essere poco più grande di un rettangolo di base 5 e altezza 1, cioè valere poco più di 1 (il grafico è stato tracciato con questo script). Apro lo script **Integral**, in cui inzialmente è inserita come y(x) sqrt(pow(x,3)+1), cioè √(x³+1). Metto **atan(x)** al posto di questo termine, salvo con un nuovo nome e avvio. Ottengo:

```
5.237955565714309  if a=0 b=5 n=1e7 [-9.112710586123285e-13]
5.23795556571522   if a=0 b=5 n=1e6 [-9.92903537166967e-11]
5.23795556581451   if a=0 b=5 n=1e5 [-9.915851251207641e-9]
5.2379555757303615 if a=0 b=5 n=1e4 [-9.915880676558686e-7]
5.237956567318429  if a=0 b=5 n=1e3 [-0.00009917391928393471]
5.238055741237713  if a=0 b=5 n=1e2 [5.238055741237713]
```

La successiva uscita sarebbe pari a circa 10^{-14}. Posso approssimare l'integrale con 5.2379555657143, in accordo con la stima 5 fatta prima (con *WolframAlpha* potrei avare ulteriori cifre: …143382815709…).

Ricordiamo che se esiste $\int_{[a,x]}$ F per ogni x in un intervallo [a, b], la funzione x → $\int_{[a,x]}$ F viene spesso chiamata un ***integrale indefinito*** di F: esprime l'area orientata tra grafico di F ed asse orizzontale compresa tra le rette verticali di ascissa **a** e di ascissa **x**. Per il teorema fondamentale dell'analisi un'integrale indefinito di F non è altro che una antiderivata di F. Invece del termine ***antiderivata***, oltre a "integrale indefinito", si usa anche ***primitiva*** (la primitiva di F è una funzione che viene "prima" dell'applicazione della derivazione). È, invece, chiamata ***integrazione definita*** l'associazione (ad F e ad un intervallo [a, b]) del numero $\int_{[a,b]}$ F.

A causa del legame tra derivazione e integrazione si è diffuso l'impiego di **∫ f(x) dx** per indicare un generico ***termine*** g(x) tale che g'(x) = f(x). È un uso che sopravvive per motivi storici, ma che è abbastanza ambiguo. È bene, dunque, fare alcune osservazioni:

- nel caso dell'integrale definito la variabile "integrata" è *muta*: si potrebbe scrivere $\int_{[-1,3]}$ f(x) dx o $\int_{[-1,3]}$ f(t) dt o $\int_{[-1,3]}$ f, o usare una variabile diversa da x e t in modo del tutto equivalente; invece ∫ f(t) dt, ∫ f(x) dx e ∫ f(u) du indicano termini diversi;
- qualcuno usa l'integrale indefinito per indicare un insieme di termini: ∫ f(x) dx = {g(x) + c / c numero reale}: ad es. ∫ 6x dx starebbe per l'insieme costituito dai termini $3x^2$, $3x^2+1$, $3x^2+2/3$, $3x^2-5$, …, ovvero dai termini del tipo $3x^2+c$ al variare di c in **R**, altri lo usano per indicare un termine particolare che abbia come derivata f(x);
- noi useremo quest'ultima convenzione, ogni tanto esplicitando, e ogni tanto no, la possibilità di aggiungere una costante, ossia qualche volta scriveremo $\int 6x\,dx = 3x^2$ e qualche altra volta $\int 6x\,dx = 3x^2+c$ lasciando al lettore la comprensione. *WolframAlpha,* come "compromesso", aggiunge un "+constant" in colore chiaro:

integral 6*x dx fornisce 3*x^2 + constant.

Le prime due colonne della tabella seguente, e i primi quattro elementi delle terza, riassumono alcune derivate e alcuni integrali d'uso comune, che è bene pian piano incominciare a memorizzare. Gli elementi successivi delle terza colonna (in marrone) possono essere consultati all'occorrenza; è, comunque, un buon esercizio verificare che le derivate di essi sono gli elementi della prima.

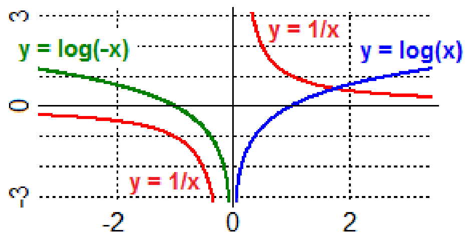
∫ g(x) dx	*g(x)*	
f(x)	***f'(x)***	***∫ f(x) dx***
k	0	kx
x^n	$n\,x^{n-1}$	$x^{n+1}/(n+1)$ (se n≠−1)
1/x	$-x^{-2}$	log(x), log(−x)
e^x	e^x	e^x
log(x)	1/x	x log(x) − x
a^x (a>0, a≠1)	a^x log(a)	a^x / log(a)
$\log_a(x)$ (a>0, a≠1)	1 / x / log(a)	(x log(x) − x) / log(a)
sin(x)	cos(x)	−cos(x)
cos(x)	−sin(x)	sin(x)
tan(x)	$\cos(x)^{-2}$ [= $1+\tan(x)^2$]	−log(cos(x)), −log(−cos(x))
asin(x)	$1/\sqrt{1-x^2}$	$x\,\text{asin}(x) + \sqrt{1-x^2}$
acos(x)	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$x\,\text{acos}(x) - \sqrt{1-x^2}$
atan(x)	$1/(1+x^2)$	$x\,\text{atan}(x) - \log(1+x^2)/2$

Nell'ultima riga della tabella si vede come si sarebbe potuto calcolare diversamente da come fatto poco sopra l'integrale tra 0 e 5 di ***atan***.

10 Calcola "a mano", e controlla con *WolframAlpha*, il valore di $\int (e^x+x^{-2}+x+3)\,dx$.

Approfondimenti

Si noti che come integrale di $1/x$ si sono messe due espressioni: $\log(x)$ e $\log(-x)$. È da intendersi che la funzione che ad x positivo associa $\log(x)$ e che a x negativo associa $\log(-x)$ ha come derivata $1/x$. Infatti per $x>0$ $d\log(x)/dx = 1/x$ e per $x<0$ $d\log(-x)/dx = -1/x\cdot(-1) = 1/x$. Ed è da intendersi che anche $\log(x)+2$, $\log(x)-2.7$, … e $\log(-x)-3$, $\log(-x)+1$, … sono integrali di $1/x$.



Errato, anche se spesso si trova scritto, è indicare l'integrale di $1/x$ con $\log|x|$ perché sottintenderebbe che una generica primitiva ha la forma $\log|x|+\mathbf{c}$ con **c** unico per x positivi e negativi. *WolframAlpha* indica come `integral 1/x dx` solo $\log(x)$ ma svolge correttamente i calcoli di fronte, ad esempio, a `integral 1/x dx from -3 to -2`.

Ricordiamo che oltre agli integrali su intervalli del tipo [**a**,**b**] abbiamo considerato integrali su gli altri tipi di intervalli, eventualmente "bucati". ***Integrali*** di questo genere vengono chiamati ***impropri***. Richiamiamo e precisiamo il loro significato, illustrando anche il loro calcolo con *WolframAlpha*.

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}\ (+\text{ costante});\quad {}_0\!\int^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} {}_0\!\int^{u} e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}(-e^{-u}+e^{0}) = 0+1 = 1$$

`int exp(-x) dx, x=0..Inf`

L'antiderivata di $\mathbf{g}: x \to 1/\sqrt{(2\pi)}\cdot e^{-x^2}$ non è una funzione elementare, ma sappiamo che

$${}_{-\infty}\!\int^{\infty} g = \lim_{u\to-\infty} {}_u\!\int^{0} g + \lim_{u\to\infty} {}_0\!\int^{u} g = 1/2 + 1/2 = 1$$

`int 1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2) dx, x=-Inf..Inf`

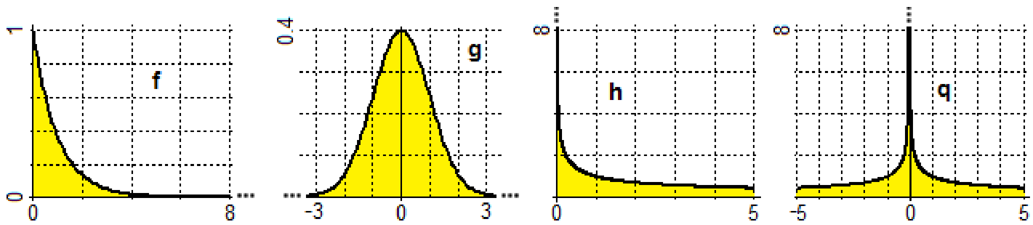
$$\int 1/\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ (+\text{ costante});\quad {}_0\!\int^{5} 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{u\to 0} {}_u\!\int^{5} 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{u\to 0}(2\sqrt{5}+2\sqrt{u}) = 2\sqrt{5}$$

`int 1/sqrt(x) dx, x=0..5` (4.4721359549995…)

$\mathbf{q}: x \to 1/\sqrt{|x|}$ è una funzione dal grafico simmetrico rispetto all'asse y. Quindi:

$${}_{-5}\!\int^{5} 1/\sqrt{|x|}\,dx = 2\ {}_0\!\int^{5} 1/\sqrt{x}\,dx = 2\cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

`int 1/sqrt(sqrt(x^2)) dx, x=-5..5` ($4\sqrt{5}$ = 8.9442719099991…)



Ovviamente non tutti gli integrali impropri "convergono". Ad esempio il grafico delle funzione $x \to x$ è la bisettrice del 1° quadrante, per cui non vi può essere alcun numero che sia il valore di ${}_0\!\int^{\infty} x\,dx$.

Note.

- Se derivo o integro una *funzione polinomiale* ottengo ancora una funzione polinomiale.

Ad es. se $F(x) = 3x^2+x-3\sqrt{2}$ ho che $F'(x) = 6x+1$ e che $\int F(x)\,dx = x^3+x^2/2-3\sqrt{2}x+c$, al variare di c in **R**.

- Di fronte a una funzione espressa mediante una formula usuale siamo sempre in grado di esprimerne mediante una formula la derivata e l'integrale? Dobbiamo precisare che cosa intendiamo per "formula usuale": se chiamiamo ***funzioni elementari*** le funzioni ottenibili mediante successive composizioni di funzioni polinomiali, di elevamento a potenza, esponenziali, logaritmiche, circolari e circolari inverse, la risposta è positiva per la derivazione (abbiamo visto tutti i procedimenti per derivare una funzione elementare ottenendo una funzione elementare), ma è negativa per l'integrazione.

Ad es. so che $d(1/\sqrt{(x^4+1)})/dx = -2x^3/\sqrt{((x^4+1)^3)}$; infatti la composizione di $x \to u = x^4+1$, $u \to y = u^{-1/2}$ ha come derivata $dy/dx = dy/du\cdot du/dx = -1/2u^{-3/2}\cdot 4x^3 = -2x^3/\sqrt{(u^3)}$. Ma non si riesce a trovare un termine descritto mediante le usuali funzioni che sia uguale a $\int (1/\sqrt{(1+x^4)})\,dx$.

Ovviamente ciò non toglie che *integrali definiti* di questo tipo siano calcolabili numericamente, ad esempio con gli script visti sopra in questo stesso paragrafo. Gli *integrali indefiniti* possono essere espressi impiegando funzioni non "elementari", come puoi osservare provando ad usare per il caso precedente *WolframAlpha*.

- Si definiscono altri concetti: *funzione razionale, funzione algebrica* e *funzione trascendente*. Se sei interessato, per approfondimenti su questi argomenti **vedi qui**. L'aggettivo ***trascendente*** è usato, in matematica, anche con altro significato: per indicare un numero (reale o complesso) che non sia soluzione di alcuna equazione polinomiale a coefficienti interi. Si può provare che π e che e, oltre ad essere irrazionali, sono trascendenti. Le dimostrazioni sono recenti, rispettivamente del 1882 e del 1873. Tuttora vi sono molti numeri che si sanno esprimere mediante gli usuali simboli funzionali per i quali non si sa se siano trascendenti o no.

6. Tecniche di integrazione

In questa voce vedremo alcuni "trucchi" per trovare, in molti casi, l'integrale di una funzione data.

Integrazione per sostituzione

Questo è il più importante metodo di integrazione. Esso si basa sulla regola della ➡ *derivazione delle funzioni composte*. Partiamo da un esempio abbastanza semplice:

$\int \mathbf{\sin(3x)\,dx}$ posso affrontarlo con la sostituzione $\mathbf{t} = 3x$, da cui cui $\mathbf{dt}/dx = 3$, $dx = dt/3$:

$\int \sin(3x)\,dx = \mathbf{1/3\cdot\int \sin(t)\,dt}$
$1/3\cdot\int \sin(t)\,dt = -\cos(t)/3$
$\int \sin(3x)\,dx = -\cos(3x)/3\ (+ c)$

Un altro esempio:

$\int$ **$2x(x^2-1)^4$ dx** posso affrontarlo con la sostituzione **u** $= x^2-1$, **du**/dx =2, du = 2x dx:

$\int 2x(x^2-1)^4\,dx = \int \mathbf{u^4\,du}$

$\int u^4\,du = u^5/5$

$\int 2x(x^2-1)^4\,dx = = (x^2-1)^5/5\ (+\ c)$

Posso controllare la soluzione con *WolframAlpha* digitando `integral 2*x*(x^2-1)^4 dx`.

In generale, $\int$ **f(g(x)) g'(x) dx** si affronta ponendo u = g(x), du = g'(x) dx, risolvendo $\int$ **f(u) du** e risostituendo g(x) ad u. Questo vale in ogni intervallo in cui **f e g' siano continue**.

Non è facile individuare la sostituzione da effettuare. Occorre, poi, stare attenti nei casi in cui siano presenti discontinuità. Puoi vedere al riguardo alcuni esempi negli ***esercizi***. Negli esercizi trovi anche esempi di applicazione di ***altri metodi*** che si basano sulla tecnica di "sostituzione".

Facciamo un esempio di **integrale definito**: $\int_{[0,1]} \sin(3x)\,dx$.
Trovato, come visto sopra, che $\int\sin(3x)\,dx = -\cos(3x)/3$, faccio:
$\int_{[0,\,1]} \sin(3x)\,dx = -\cos(3\cdot 1)/3 - (-\cos(3\cdot 0)/3) = -\cos(3)/3 + 1/3$ Abbiamo potuto procedere così in quanto non sono presenti discontinuità.

Integrazione per parti

Questo "trucco" si basa su una riscrittura della regola della ➜ *derivazione del prodotto.*

$$D(f\cdot g) = D(f)\cdot g + g\cdot D(f) \ \rightarrow\ g\cdot D(f) = D(f\cdot g) - D(f)\cdot g \ \rightarrow\ \mathbf{\int g\cdot D(f) = f\cdot g - \int D(f)\cdot g}$$

Qualche esempio.

$\int$ **x e^x dx** Idea: è il prodotto di due termini, **x** ed **e^x**, dei quali
il primo ha una derivata più semplice $[D_x(\mathbf{x}) = 1]$ e
il secondo è facile interpretarlo come la derivata di un altro termine $[\mathbf{e^x} = D_x(e^x)]$. Quindi:
$\int x\,e^x\,dx = \int x\,D_x(e^x)\,dx = x\,e^x - \int D_x(x)\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = \mathbf{x\,e^x - e^x}\ (+\ c)$

$\int$ **x^2 e^x dx** Idea: è simile al precedente con il primo termine, **x^2**, che
ha come derivata $D_x(\mathbf{x^2}) = 2x$. Quindi, usando quanto ottenuto sopra:
$\int x^2\,e^x\,dx = \int x^2\,D_x(e^x)\,dx = x^2\,e^x - \int D_x(x^2)\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\int x\,e^x\,dx = (*)$
$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x$
$(*) = x^2\,e^x - 2(x\,e^x - e^x) = \mathbf{e^x\,(x^2 - 2x + 2)}\ (+\ c)$

Posso controllare l'esito con *WolframAlpha* battendo `integral x^2*exp(x) dx`

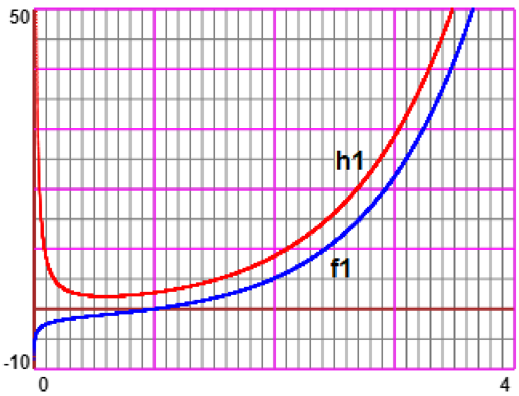
$\int$ **log(x) dx** Idea: immagino la presenza di un fattore "**·1**" da interpretare come D(f):
$\int 1\cdot\log(x)\,dx = \int D_x(x)\cdot\log(x)\,dx = x\cdot\log(x) - \int x\cdot D_x(\log(x))\,dx = x\cdot\log(x) - \int 1\,dx$. Quindi:
$\int \log(x)\,dx = \mathbf{x\cdot\log(x) - x}\ \ (+\ c)$

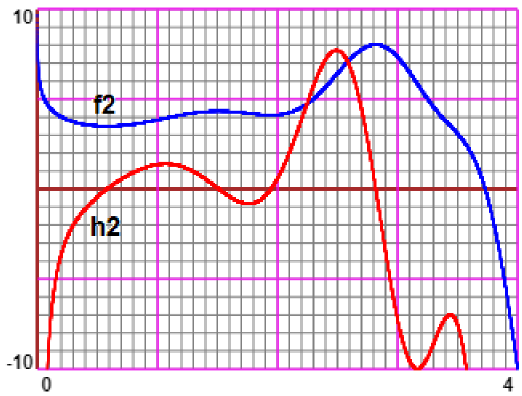
Ecco un esempio di integrazione per parti di un integrale definito.
Non faccio altro che calcolare l'integrale indefinito (cosa che in questo caso abbiamo appena fatto) e poi procedere nel modo usuale:
$\int_{\mathbf{[1,\,2.5]}} \mathbf{log} = [x\cdot\log(x)-x]_{x=2.5} - [x\cdot\log(x)-x]_{x=1} = 2.5\cdot\log(2.5)-2.5 - 1\cdot\log(1)+1 = 2.5\cdot\log(2.5) = 0.7907268.$

Posso controllare l'esito con *WolframAlpha* introducendo `integral log(x) x=1..2.5` o con lo script **Integral**.

7. Esercizi

`e1` Sotto, a sinistra, il grafico di una funzione e della sua funzione derivata. Qual è il grafico della prima e quello della seconda? Perché? Determina, arrotondata ai decimi, l'ascissa del punto di flesso della prima.





`e2` Sopra, a destra, il grafico di una funzione e della sua funzione derivata. Qual è il grafico della prima e quello della seconda? Perché? Determina, arrotondate ai decimi, le ascisse e, arrotondate agli interi, le ordinate dei punti di minimo (realtivo), di massimo (relativo) e di flesso della prima.

e3 Determina la derivata rispetto ad x di $\log(x+\sqrt{(1+x^2)})$ e $\log(|\cos(x)|)$

e4 Determina la derivata rispetto ad x di $\exp(5x-x^2)$ e $\sqrt{(\exp(3x)+1)}$

e5 Determina: $D_x\,(5x+2/x)$ $D_x\,(2x+1)^2$ $D_x\,3(8x^2+2x-1)^3$.

e6 Siano F: $x \to A\cdot x+B$ se $x < 0$, $x \to \exp(x)$ se $x \ge 0$, G : $x \to P\cdot x+Q$ se $x < 1$, $x \to \log(x)$ se $x \ge 1$. (**1**) Determina quali valori devono avere A e B affinché F sia continua in **R** e quali affinché sia derivabile in **R**. (**2**) Determina quali valori devono avere P e Q affinché G sia continua in **R** e quali affinché sia derivabile in **R**.

e7 Sia $F(x) = \ln(x) / (x-1)$. Traccia la curva $y = F(x)$ precisando quali sono gli x per cui F(x) è definito, qual è l'insieme dei possibili output (ossia l'immagine di F), quali sono gli intervalli in cui cresce e quelli in cui decresce (ricava questi ultimi intervalli graficamente; poi, se vuoi, cerca di individuare il segno della derivata prima, osservando che è lo stesso di $1-\log(x)-1/x$; studia il segno di questo termine valutando, a sua volta, quello della sua derivata).

e8 Siano $F1(x) = \ln(x) / (x^2-1)$ e $F2(x) = \ln(x) / (x^3-1)$. Traccia le curve $y = F1(x)$ e $y = F2(x)$.

e9 Sia G la funzione ottenuta prolungando con continuità nell'origine la funzione $x \to (e^{-x}-1)/x$.
Esiste G'(0)? In caso negativo motivare la risposta, in caso affermativo determinarne il valore.
Stessi quesiti per G"(0).

e10 Sia G la funzione ottenuta prolungando con continuità nell'origine la funzione $x \to e^{-1/x^2}$.
Esiste G'(0)? In caso negativo motivare la risposta, in caso affermativo determinarne il valore.
Stessi quesiti per G"(0).

e11 Dove $x \to \dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ è crescente e dove è decrescente?

e12 Studia f: $x \to -3\cdot(x^2-9) / (x^2-4)$.

e13 Determina la derivata rispetto a x di:
(a) $(x+1)(x-1)$ (b) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$ (c) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x^2-1)$

e14 Sia $F(x) = x\sin(x)$ se $0 \le x \le \pi/2$, $F(x) = 2x\sin(x)$ altrimenti. Determina $\int_{[0,\pi]} F$.

e15 Determina la derivata rispetto a x (e controlla le risposte con *WolframAlpha*, ed eventualmente rieffettua il calcolo) di:
(a) $\cos(x^2)$ (b) $\sqrt{(1+x^2)}$ (c) $\log(\log(x))$

e16 Calcola (motivando) g'(1) dove g è la funzione inversa di f così definita: $f(x) = x + x^3 - 1$.

e17 Calcola con **WolframAlpha** F'(2) e G'(π/2) dove $F(x) = \sqrt{(1+2x^2)}$ e $G(x) = x^2\cdot\sin(3x)$.

e18 Calcola $\int x^2 \log(x)\,dx$ e $\int \log(x^2+1) / x^2\,dx$

e19 Calcola $\int \sin(2x)\cos(2x)\,dx$ (procedere per sostituzione)

e20 Calcola $\int x^2 \sin(3x)\,dx$ e $\int \sin(x^2)\,dx$

e21 Determina h e k in modo che **f** definita nel modo seguente sia derivabile in tutto il suo dominio.

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} x\cdot\cos(x+k) & \text{se } x > 0 \\ x + h & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

e22 Traccia il grafico di F: $x \to \mathbf{e}^{G(x)}$ dove G è una funzione derivabile due volte in **R**, ha due punti di estremo relativo in −2 e 1, vale rispettivamente −1 e 2 in tali punti, ha un solo cambio di concavità.

e23 Il grafico di **e**1 è stato tracciato con questo script. Trova (eventualmente aiutandoti con *WolframAlpha*) il valore esatto delle coordinate del punto di flesso.

e24 Il grafico di **e**2 è stato tracciato con questo script. Confronta i grafici di **e**2 con quelli ottenibili con *WolframAlpha* battendo `plot y = x^3+sin(x*x)-log(x)*exp(x)+2, x=0..5` e `plot y = D(x^3+sin(x*x)-log(x)*exp(x)+2), x=0..5`.
Determina le ascisse dei punti individuati in **e**2 battendo `D(x^3+sin(x*x)-log(x)*exp(x)+2)=0` e `D(D(x^3+sin(x*x)-log(x)*exp(x)+2))=0`.

e25 Leggi la seguente sezione sull'integrazione delle funzioni che sono *rapporto di funzioni polinomiali* e cerca di svolgere gli esercizi proposti.

e26 Leggi la seguente sezione sull'integrazione per *sostituzione trigonometrica* e cerca di svolgere l'esercizio proposto.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

derivata di una funzione (§2), *regola de L'Hopital* (§3), *flesso* (§4), *asintoto* (§4), *integrazione definita* (§5), *funzione elementare* (§5), *integrazione per sostituzione* (§6), *integrazione per parti* (§6)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici GraficD divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro sin LenArc Poligono Circ3P Inscr3P Istogramma RandomNum IntegrPol IntGauss Integral AB3dim distOnSphere TabFun Deriv Det3 DaTabella RegCorr ALTRO