I condensatori

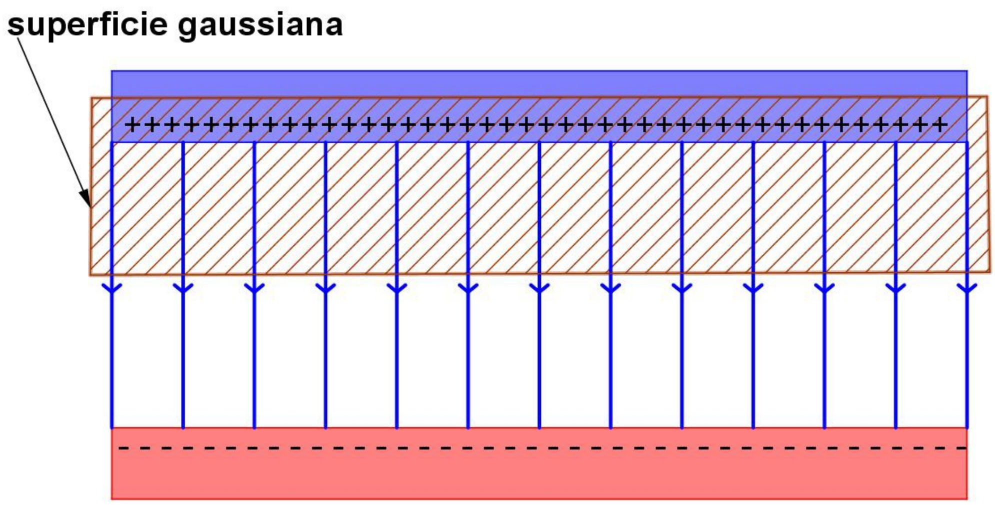
Finora abbiamo detto che i condensatori piani sono dispositivi che, immagazzinando carica sulle loro armature, ci permettono di avere un campo elettrico uniforme tra di esse. Nulla però abbiamo detto sull'intensità di tale campo.

In questo approfondimento mostreremo che è vero quel che è facile immaginare: il campo è cioè proporzionale alla carica Q che si trova sulle armature. Anche la differenza di potenziale tra le armature, di conseguenza, risulterà proporzionale alla carica Q presente su di esse.

Vedremo inoltre che caricare un condensatore è un'operazione che richiede un ben definito esborso d'energia. Impareremo quindi a calcolare l'energia immagazzinata in un condensatore carico.

Calcoliamo l'intensità del campo

Per calcolare l'intensità del campo elettrico dentro ad un condensatore piano applichiamo la prima equazione di Maxwell, secondo la quale il flusso di campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica racchiusa al suo interno, divisa per la costante elettrica del vuoto. Per fare il calcolo in modo semplice scegliamo una superficie chiusa particolare: un cilindro (se le armature del condensatore sono circolari, altrimenti un parallelepipedo) le cui basi siano appena un po' più grandi rispetto alle armature del condensatore. La prossima figura mostra come disporre l'ideale superficie gaussiana. L'immagine è naturalmente bidimensionale, ed occorre un minimo sforzo di astrazione per immaginarla quale effettivamente essa è nelle tre dimensioni dello spazio.



Sappiamo che il flusso attraverso questa superficie chiusa è Q/ε_0, dove Q è la carica che si trova sulle armature del condensatore.
Inoltre sappiamo che non c'è flusso attraverso la superficie laterale del cilindro, perché essa non è attraversata da alcuna linea di campo, e non c'è flusso attraverso la base superiore, perché in quella zona il campo elettrico è zero. Dunque il flusso è tutto attraverso la base inferiore del cilindro, dove il campo è perpendicolare alla superficie, quindi è uguale a $E \cdot A$, dove A è l'area delle armature. In definitiva abbiamo che:

$$E \cdot A = Q/\varepsilon_0 \qquad \text{quindi} \qquad E = Q/(A \cdot \varepsilon_0)$$

Calcoliamo la differenza di potenziale

Calcolare la differenza di potenziale tra le armature è facile. Dato che il campo è uniforme, la differenza di potenziale è semplicemente il campo moltiplicato per la distanza d tra le armature del condensatore:

$$\Delta V = E \cdot d = Qd/(A \cdot \varepsilon_0)$$

Differenza di potenziale e carica sono direttamente proporzionali, come avevamo preannunciato. La costante di proporzionalità è il reciproco di quella che si chiama *capacità C* del condensatore.

$$\Delta V = Q/C \qquad \text{dove} \qquad C = A\varepsilon_0/d$$

Se risolviamo rispetto a C troviamo che $C = Q/\Delta V$, quindi la capacità si misura in C/V, unità di misura che prende il nome di farad, simbolo F. Diciamo che un condensatore ha la capacità di 1 F se, sottoposte le sue armature alla differenza di potenziale di 1 V, esse immagazzinano la carica di 1 C. Abbiamo detto che la carica di 1 C è in realtà una carica enorme, ora diciamo che anche la capacità di 1 F è una capacità enorme rispetto alle situazioni che si presentano nella vita di tutti i giorni: i condensatori di uso più comune hanno capacità il cui ordine di grandezza varia da 10^{-12} F fino a 10^{-3} F. Esistono tuttavia super-condensatori la cui capacità può raggiungere diverse migliaia di farad.

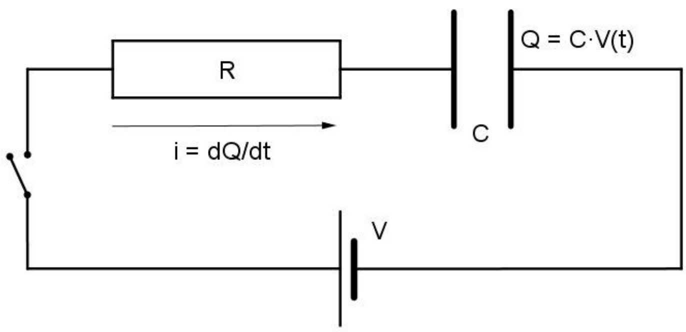
Analogie con la legge di Ohm

I resistori servono a regolare il flusso di corrente. L'intensità I della corrente che scorre in un resistore è proporzionale alla differenza di potenziale ΔV applicata ai suoi terminali, e la costante di proporzionalità 1/R è il reciproco della sua resistenza:	$I = 1/R * \Delta V$
I condensatori servono a immagazzinare carica. La carica Q immagazzinata sulle armature di un condensatore è proporzionale alla differenza di potenziale ΔV applicata ai suoi terminali, e la costante di proporzionalità C è la sua capacità:	$Q = C * \Delta V$

La resistenza di un filo conduttore dipende dalle sue caratteristiche geometriche (lunghezza L e sezione S) e dal materiale di cui è fatto, contraddistinto dalla sua resistività ρ:	$R = \rho*L/S$
La capacità di un condensatore dipende dalle sue caratteristiche geometriche (area A delle armature e distanza d che le separa) e dal materiale interposto tra di esse (nel nostro caso il vuoto, caratterizzato dalla costante elettrica ε_0):	$C = \varepsilon_0*A/d$

Come avviene il processo di carica

Per caricare un condensatore si collegano le sue armature ai terminali di un generatore di tensione: in questo modo si viene a stabilire tra le armature una differenza di potenziale V uguale alla differenza di potenziale presente tra i terminali del generatore. Il processo non è tuttavia istantaneo, ma richiede un certo tempo, tanto più lungo quanto più è grande la resistenza del circuito con cui il generatore di tensione viene collegato al condensatore. Una grande resistenza, infatti, riduce l'intensità della corrente di carica, quindi le armature immagazzinano carica ad un ritmo tanto più lento quanto più è grande la resistenza del circuito. Il tempo di carica, d'altra parte, cresce con il crescere della capacità del condensatore che vogliamo caricare: maggiore la capacità, come abbiamo visto, maggiore la quantità di carica che il condensatore immagazzina a parità di differenza di potenziale.



La prossima figura mostra gli elementi del circuito che stiamo considerando. Il condensatore, inizialmente scarico, comincia a caricarsi nel momento in cui si chiude l'interruttore che si vede sulla sinistra.
In ogni istante di tempo t è vera l'equazione seguente:

$$Q(t)/C + R*dQ(t)/dt = V \quad (*)$$

L'equazione che abbiamo appena scritto dice che, in ogni istante di tempo che segue la chiusura dell'interruttore, la somma delle differenze di potenziale che misuriamo ai capi della resistenza ($R*i(t) = R*dQ(t)/dt$) e del condensatore ($Q(t)/C$) uguaglia la differenza di potenziale tra i terminali del generatore (V).

Vale la pena chiarire brevemente il significato dell'equazione $i(t) = dQ(t)/dt$. Nella lezione 38 abbiamo definito l'*intensità media* di corrente elettrica come rapporto tra la carica Q transitata attraverso una sezione del circuito e il tempo t richiesto per tale transito. Se la carica fluisce a un ritmo costante, questo rapporto ha sempre lo stesso valore. Ma se il ritmo cambia, come nella carica di un condensatore, dobbiamo definire l'*intensità* di corrente elettrica come derivata rispetto al tempo della funzione $t \to Q(t)$.

L'incognita che vogliamo determinare nell'equazione (*) non è un singolo valore, bensì una funzione: vogliamo cioè sapere come cambia la carica sulle armature del condensatore in funzione del tempo. Si tratta insomma di un'*equazione differenziale*, in cui l'incognita è la funzione $t \to Q(t)$.

Per maggiori dettagli su questo argomento conviene consultare la voce "*Equazioni differenziali – 1*" degli Oggetti Matematici, e la scheda di lavoro "*Modelli differenziali*" del volume per la classe quinta. A noi basta osservare che la soluzione cercata deve avere queste due caratteristiche:

- $Q(0) = 0$ cioè: nell'istante iniziale, quando si chiude l'interruttore, il condensatore deve ancora cominciare a caricarsi, quindi in quell'istante la carica sulle armature è nulla.
- $Q(\infty) = CV$ cioè: completato il processo di carica la Q sulle armature è il prodotto tra la differenza di potenziale V fornita dal generatore e la capacità del condensatore.

La soluzione dell'equazione è allora un'esponenziale crescente:

$$Q(t) = CV*(1 - \exp(- t/(RC)))$$

Per verificarlo dividiamo per C e distribuiamo la moltiplicazione:

$$Q(t)/C = V - V\cdot\exp(- t/(RC))$$

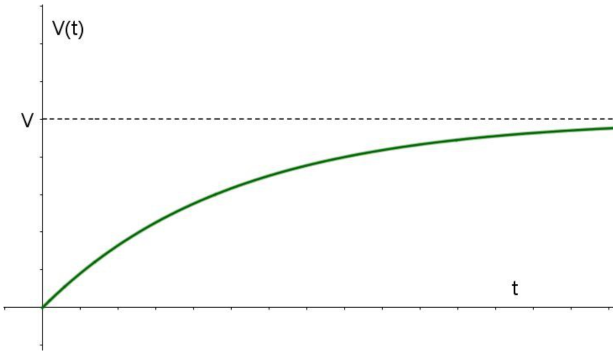
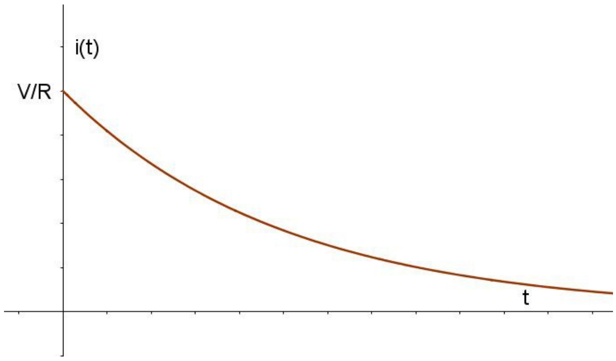
Poi deriviamo rispetto a t e moltiplichiamo per R:

$$R\cdot dQ(t)/dt = - RC\cdot V\cdot\exp(- t/(RC))\cdot(- 1/(RC)) = V\cdot\exp(- t/(RC))$$

quindi la somma dei due termini è proprio V, come doveva essere.

Il termine RC si chiama *costante di tempo* del circuito. Per fare un controllo dimensionale ci basta osservare che la resistenza si misura in ohm, cioè in volt/ampere, mentre la capacità si misura in farad, cioè in coulomb/volt. Il prodotto RC si misura quindi in coulomb/ampere, cioè in secondi.

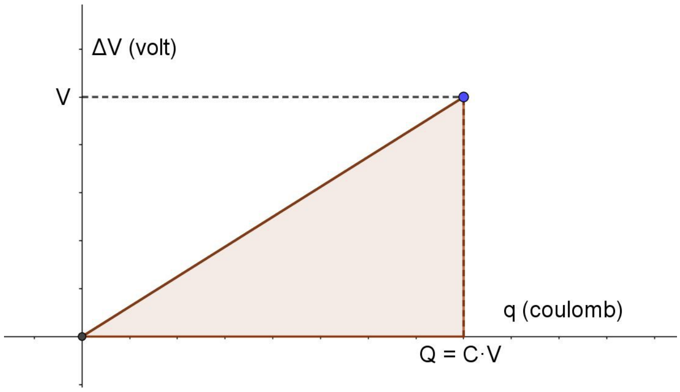
La costante di tempo rappresenta il tempo caratteristico necessario al processo di carica del condensatore. Con riferimento ai grafici che seguono, possiamo dire che la differenza di potenziale ai capi delle armature, e la corrente che circola nel circuito, tendono a stabilizzarsi in un tempo pari a circa quattro costanti di tempo. Per la precisione: quattro costanti di tempo sono sufficienti perché la differenza di potenziale tra le armature raggiunga il 98% di V e la corrente di carica scenda al 2% del valore iniziale V/R.

	
La differenza di potenziale tra le armature del condensatore. Inizialmente nulla, tende a stabilizzarsi sul valore V, cioè la differenza di potenziale tra i terminali del generatore.	La corrente di carica del condensatore. Inizialmente pari a V/R, quando il condensatore è scarico, tende a zero con il caricarsi del condensatore.

L'energia del campo elettromagnetico

Per caricare il condensatore il generatore deve spendere lavoro: se si tratta di una pila, essa si scarica durante il processo, e parte dell'energia persa dalla pila la ritroviamo immagazzinata nel condensatore. Il lavoro compiuto nel processo di carica, inoltre, diventa più gravoso a mano a mano che il processo procede: la repulsione coulombiana, infatti, rende sempre più difficile aggiungere nuova carica a quella che già si trova sulle armature.

Il prossimo grafico mostra come varia la differenza di potenziale ΔV tra le armature del condensatore, non più in funzione del tempo come nel grafico precedente, bensì al variare della carica q accumulata su di esse: si tratta naturalmente di una retta la cui pendenza è $1/C$. Al termine del processo la differenza di potenziale è V (quella data dal generatore), la carica è quindi $Q = C \cdot V$.



Il lavoro compiuto dal generatore nel processo di carica è semplicemente l'area evidenziata sotto al grafico in figura (il ragionamento è identico a quello che abbiamo già visto a proposito del problema 12 della lezione 15). L'energia immagazzinata nel condensatore è quindi $U = \frac{1}{2}CV^2$.

Ora vogliamo far comparire il campo elettrico nell'espressione precedente. Per farlo basta tener conto che la differenza di potenziale si può scrivere così: $V = Ed$, mentre per la capacità sappiamo che $C = A\varepsilon_0/d$, dove A e d sono rispettivamente l'area delle armature e la loro distanza. Il prodotto Ad è quindi il volume compreso tra le armature del condensatore. Sostituendo in U troviamo:

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(A\varepsilon_0/d)E^2d^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2dA = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cdot\text{volume del condensatore}$$

Se indichiamo con u la densità di energia associata al campo elettrico, cioè l'energia per unità di volume immagazzinata tra le armature, otteniamo un risultato semplice ed elegante:

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2$$

Questa relazione è del tutto generale, indipendente cioè dal fatto che che il campo elettrico sia quello prodotto da un condensatore:

Se in una certa regione di spazio è presente un campo elettrico di modulo E, allora in quella zona di spazio è accumulata un'energia per unità di volume

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2.$$

Un discorso perfettamente analogo vale per il campo magnetico:

Se in una certa regione di spazio è presente un campo magnetico di modulo B, allora in quella zona di spazio è accumulata un'energia per unità di volume

$$u = \tfrac{1}{2}B^2/\mu_0.$$

Esercizi.

1. Quanto è intenso il campo elettrico tra le armature di un condensatore piano che hanno un'area di 1 cm^2 e portano la carica di 1 nC? La risposta dipende oppure no dalla distanza che separa le due armature?
2. Consideriamo il condensatore del problema precedente. Qual è la differenza di potenziale tra le due armature, se la distanza che le separa è di 1 mm? Come cambia la risposta se la distanza è la metà?
3. Qual è la capacità di un condensatore che, caricato con una carica di 1 μC, presenta una differenza di potenziale di 10 V tra le sue armature?
4. Qual è la capacità di un condensatore che, sottoposto a una differenza di potenziale di 50 V, accumula sulle sue armature una carica di 20 nC?
5. Un impianto di amplificazione contiene un condensatore da 10 mF. Quanta carica immagazzina quando tra le sue armature c'è una differenza di potenziale di 220 V?
6. Un condensatore di capacità 10 mF viene caricato attraverso una resistenza da 33 kΩ. Qual è la costante di tempo del circuito? Quanto tempo ci vuole, approssimativamente, perché il condensatore sia completamente carico?
7. Per caricare un condensatore di capacità 6800 μF usiamo un generatore da 25 V e una resistenza da 5600 Ω. (a) Qual è la costante di tempo del circuito? (b) Qual è la differenza di potenziale tra le armature del condensatore 10 secondi dopo che il processo di carica è cominciato? (c) Quanto è intensa la corrente che circola nel resistore nel momento in cui il processo di carica inizia? (d) Quanto è intensa la corrente che circola nel resistore 10 s dopo che il processo di carica è iniziato? (e) Quanto valgono corrente e carica 1 minuto dopo l'inizio del processo? (f) Quanto valgono corrente e carica 5 minuti dopo l'inizio del processo?
8. Ora vogliamo risolvere il problema precedente usando WolframAlpha. La riga che possiamo scrivere nella barra di inserimento del programma è per esempio la seguente:

   Q(t)/0.0068 + 5600*dQ(t)/dt = 25, Q(0)=0

   dove all'equazione (*) abbiamo aggiunto la condizione iniziale secondo la quale il condensatore è scarico all'istante 0. La risposta che otteniamo è:

   Q(t) = 0.17 – 0.17*e^(-0.0262605*t)

Che cosa rappresentano le due costanti 0.17 e -0.0262605 che compaiono nella risposta?

Per fare il grafico della funzione Q possiamo scrivere ad esempio:

plot Q(t) = 0.17 – 0.17*e^(-0.0262605*t) from t=0 to t=200

Il grafico che si ottiene conferma quello che si è detto nel testo a proposito del tempo richiesto per completare il processo di carica?

9. Vicino alla superficie della Terra c'è un campo elettrico, diretto verso il basso, la cui intensità è di circa 100 N/C. Qual è la densità di energia u associata a questo campo? Per rispondere bisogna tener conto del fatto che la costante elettrica dell'aria è quasi uguale a quella del vuoto.

10. Con riferimento al problema precedente, quanta energia è immagazzinata sotto forma di campo elettrico in 1 cm^3 di aria vicino alla superficie della Terra?

11. Un bizzarro condensatore piano è fatto da 2 armature quadrate di lato 5 m, poste alla distanza di 1 mm. Tra le due armature c'è solo aria. Carichiamo il condensatore usando un generatore da 100 V. (a) Qual è la capacità del condensatore? (b) Quanta carica si accumula sulle sue armature? (c) Quanto è intenso il campo elettrico nello spazio tra le due armature? (d) Quanta energia è accumulata nel campo elettrico tra le armature?

12. Un lungo filo rettilineo è percorso dalla corrente di 10 A. Qual è la densità di energia del campo magnetico che si crea alla distanza di 1 cm dal filo?

13. Costruiamo un solenoide avvolgendo 10000 spire di raggio 1 cm lungo una distanza di 10 cm. Nel solenoide facciamo passare una corrente di 3 A. Quanta energia è immagazzinata nel campo magnetico che c'è dentro al solenoide?