Lezione 8: Le equazioni del moto

8.1. Che cosa sono le equazioni del moto?

La nostra conoscenza del moto degli oggetti si è fatta più articolata. Sappiamo prevedere se un corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme, oppure se il suo moto sarà accelerato: per farlo ci basta conoscere quali sono le forze che agiscono su di esso.

Quello che ancora ci manca è una descrizione del moto che sia più potente dal punto di vista della matematica che usiamo. L'elemento fondamentale di questa descrizione sarà costituito dalle equazioni del moto.

Le equazioni del moto sono due equazioni che, per ciascun istante t, forniscono due informazioni:

- dove il corpo si trova, cioè la sua posizione $S(t)$
- quanto rapidamente il corpo si sta muovendo, cioè la sua velocità $v(t)$

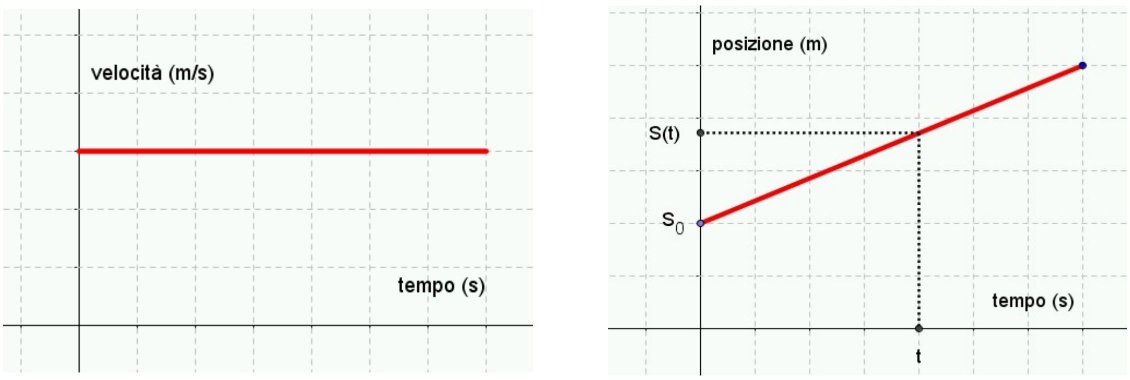
Per costruire le equazioni del moto abbiamo bisogno di tre informazioni:

- dove si trova il corpo all'istante iniziale $t = 0$, cioè la sua posizione iniziale S_0;
- quanto velocemente si muove il corpo all'istante $t = 0$, cioè la sua velocità iniziale v_0;
- la sua accelerazione a.

In questa unità parleremo di corpi che si muovono in linea retta, quindi le equazioni che troveremo si riferiranno a moti rettilinei.

8.2. Le equazioni del moto rettilineo uniforme

L'espressione *moto rettilineo uniforme* indica il moto di un oggetto che procede in linea retta con una velocità costante. I grafici tempo – velocità e tempo – posizione per questo tipo di moto sono riportati in ►fig.8.1



a) b)

Fig.8.1 I due grafici che descrivono il moto uniforme:
a) il grafico tempo – velocità; b) il grafico tempo - posizione.

Il grafico tempo – velocità è una semiretta orizzontale. La sua pendenza è zero, e ciò significa che anche l'accelerazione è zero. Il valore della velocità è costante, quindi v(t), cioè il valore della velocità all'istante t, è sempre lo stesso.
Il grafico tempo – posizione è una semiretta la cui pendenza (costante) è uguale alla velocità costante con cui il corpo si sta muovendo.
Indichiamo con S_0 la posizione all'istante 0, con S(t) la posizione all'istante t. La differenza $\Delta S = S(t) - S_0$ è la distanza che il corpo ha percorso nell'intervallo di tempo che va dall'istante 0 all'istante t, quindi:

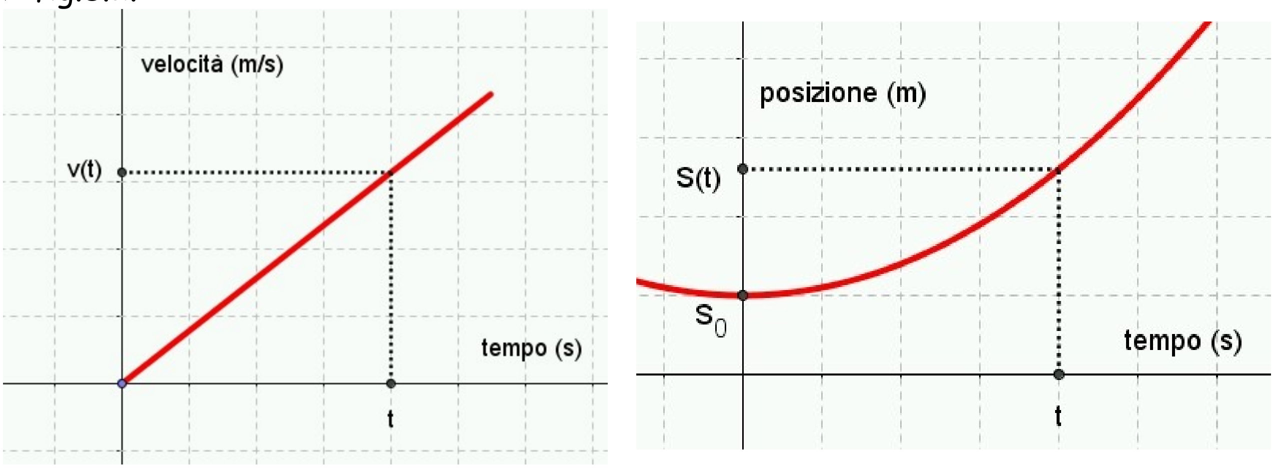
$$\Delta S = S(t) - S_0 = v \cdot t$$

Le equazioni del moto rettilineo uniforme sono allora:

$$\begin{cases} v(t) = \text{costante} = v \\ S(t) = S_0 + v \cdot t \end{cases}$$

8.3. Le equazioni del moto accelerato con partenza da fermo

I moti in cui la velocità cambia sempre allo stesso ritmo, cioè i moti in cui l'accelerazione è costante, si chiamano *moti uniformemente accelerati*. In questo paragrafo consideriamo il moto con "partenza da fermo", cioè che all'istante iniziale ha velocità nulla.
I grafici tempo – velocità e tempo – posizione per questo tipo di moto sono riportati in ►fig.8.2.



a) b)

Fig.8.2 I due grafici che descrivono il moto uniformemente accelerato con partenza da fermo: a) il grafico tempo – velocità; b) il grafico tempo – posizione.

Poiché per t = 0 la velocità è 0 (il corpo parte da fermo), il grafico tempo – velocità è una semiretta che parte dall'origine degli assi.
La pendenza della semiretta è in ogni punto la stessa e, come sappiamo, è uguale all'accelerazione costante a con cui si muove il corpo. La velocità al tempo t è $v(t) = a \cdot t$.

Indichiamo con S_0 la posizione all'istante 0, con $S(t)$ la posizione all'istante t. La differenza $\Delta S = S(t) - S_0$ è la distanza che il corpo ha percorso nell'intervallo di tempo che va dall'istante 0 all'istante t, quindi:

$$\Delta S = S(t) - S_0 = v_{media} \cdot t$$

Sappiamo già dalla lezione 5 (paragrafo 5.4) come calcolare, almeno in questo caso, la velocità media: poichè l'accelerazione è costante ci basta calcolare la media tra il valore iniziale (che è 0) e quello finale (che è $a \cdot t$). Quindi:

$$v_{media} = \frac{0 + a \cdot t}{2} = \frac{1}{2}at$$

$$\Delta S = S(t) - S_0 = v_{media} \cdot t = \frac{1}{2}at \cdot t = \frac{1}{2}at^2$$

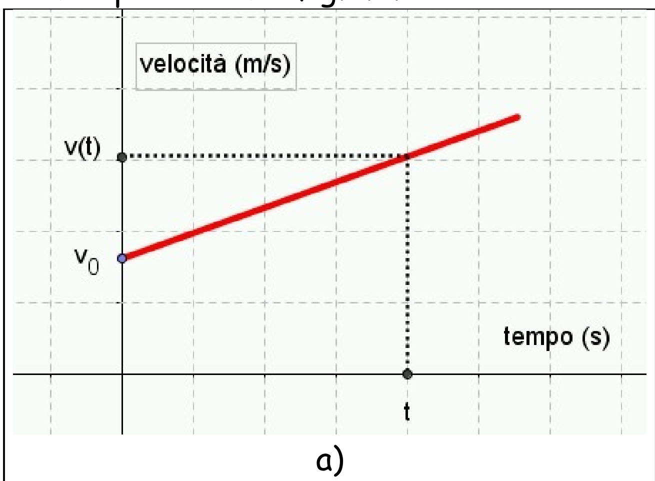
$$S(t) = S_0 + \frac{1}{2}at^2$$

Vediamo insomma che la relazione tra la posizione S e il tempo t è una proporzionalità quadratica, il cui grafico è una parabola.
Le equazioni del moto uniformemente accelerato sono perciò:

$$\begin{cases} v(t) = a \cdot t \\ S(t) = S_0 + \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

8.4. L'equazione del moto accelerato con una velocità iniziale

Consideriamo ora il caso del moto uniformemente accelerato in cui la velocità iniziale non sia zero. I grafici tempo – velocità e tempo – posizione per questo tipo di moto sono riportati in ►fig.8.3.



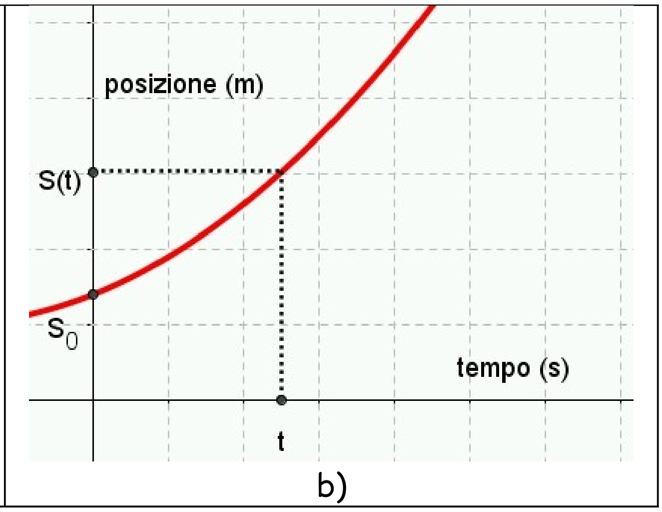


Fig.8.3 I due grafici che descrivono il moto uniformemente accelerato con velocità iniziale diversa da zero: a) grafico tempo – velocità; b) grafico tempo - posizione.

Il grafico tempo – velocità è una semiretta: la sua pendenza è l'accelerazione con cui il corpo si sta muovendo. L'unica differenza rispetto al caso precedente è che l'origine della semiretta è nel punto (0 ; v_0): questo significa che la velocità al tempo t = 0 non è nulla, ma vale v_0. La velocità al tempo t è $v(t) = v_0 + a \cdot t$.
Anche in questo caso, la differenza $\Delta S = S(t) - S_0$ è la distanza che il corpo ha percorso nell'intervallo di tempo che va dall'istante 0 all'istante t, quindi:

$$\Delta S = S(t) - S_0 = v_{media} \cdot t$$

Poiché l'accelerazione è costante, per conoscere la velocità media ci basta calcolare la media aritmetica tra il valore iniziale (che è v_0) e quello finale (che è $v_0 + a \cdot t$). Quindi:

$$v_{media} = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at$$

$$\Delta S = S(t) - S_0 = \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right) \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Le equazioni del moto uniformemente accelerato con velocità iniziale sono perciò:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a \cdot t \\ S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

A prima vista può sembrare che non ci sia alcuna differenza tra le parabole di fig.8.2 e di fig.8.3. Può cioè sembrare che siano identici i grafici tempo – posizione per un moto accelerato con partenza da fermo o con una velocità iniziale v_0.
Naturalmente una differenza c'è: se guardate con più attenzione vi accorgete che la parabola di fig.8.2 ha una tangente orizzontale all'istante t=0: come sapete questo significa che la velocità iniziale è zero, perché è zero la pendenza della tangente al grafico tempo - posizione. In fig.8.3, invece, la parabola ha una tangente che non è orizzontale in corrispondenza dell'istante t=0: la pendenza di questa tangente è uguale alla velocità iniziale v_0.