SLIDE 1

ASSOCIAZIONE LIGURE INSEGNANTI DI MATEMATICA
15 Gennaio 2025

Dai gesti a prototipi di macchine matematiche: un percorso con studenti ERASMUS attraverso linguaggi e metodi della matematica

G. CANEPA – G. FENAROLI – E. FLORIO – N. VAN DER POUW

SLIDE 2

Istituto Tecnico Einaudi-Casaregis-Galilei di Genova

- ERASMUS (*EuRopean Community Action Scheme for the Mobility of University Students* (Erasmus)
- Progetto: *New Paths in Maths*
- Tema di ricerca : *Donne scienziate o matematiche del proprio paese*.

L'esperienza didattica alla quale facciamo riferimento è stata realizzata presso

Istituto Tecnico Einaudi-Casaregis-Galilei di Genova

In ERASMUS (*EuRopean Community Action Scheme for the Mobility of University Students*

- per il Progetto: *New Paths in Maths*
- sul Tema di ricerca : *Donne scienziate o matematiche del proprio paese*.

SLIDE 3

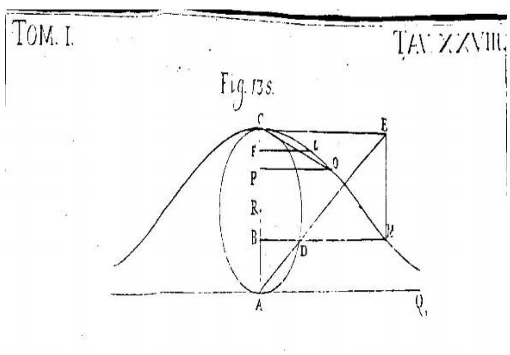
SCELTA :Maria Gaetana Agnesi

La scelta degli insegnanti dell’Istituto, condivisa dagli studenti, è caduta su Maria Gaetana Agnesi, studiosa italiana molto versata negli studi, ed eccellente in quelli della matematica

SLIDE 4


INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.



Anticipiamo da ora che l'oggetto che ha costituito il fulcro matematico dell'esperienza didattica per gli studenti ERASMUS è stata una particolare curva studiata da Maria Gaetana Agnesi, indicata poi come *Curva di Agnesi*, altrimenti detta *Versiera*, studiata dall'autrice nel suo volume: *Istituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana* (1748)

Osserviamo che la curva Versiera sorse a particolare interesse proprio in uno dei più affascinanti punti di "svolta " nella Storia della Matematica, quello che coinvolse matematici famosissimi come Viète, Fermat , Des Cartes e poi Leibnitz e Newton, e che attraverso uno sviluppo creativo del ruolo dell' algebra e poi con l'invenzione del calcolo rese la matematica uno straordinario strumento di conoscenza e di modellizzazione della realtà, ma anche portatrice di un ruolo culturale e di acquisizioni metodologiche che di fatto la trascendono.

A tal proposito proponiamo un sintetico inquadramento della Versiera nella Storia della Matematica.

SLIDE 5

ŒUVRES
DE FERMAT

encore fait découvrir une infinité de courbes dont on obtient les quadratures en supposant celle de courbes plus simples, comme le cercle, l'hyperbole, etc.

Par exemple, dans l'équation du cercle $b^2 - a^2 = e^2$, on a, données en rectilignes, les sommes de toutes les puissances des ordonnées dont l'exposant est pair, carrés, bicarrés, bicubes, etc. Quant à la somme des puissances à exposant impair, comme celles des e^3, e^5, elle n'est donnée en rectilignes que si l'on suppose la quadrature du cercle. Il est facile de démontrer ce que je viens de dire et de le réduire en règle, comme corollaire de la méthode qui précède.

Il arrive aussi souvent que, pour trouver la mesure d'une courbe proposée, il faille réitérer l'opération deux fois ou plus souvent encore.

Soit proposée, par exemple, la courbe déterminée par l'équation suivante :

$$b^3 = a^2 e + b^2 e.$$

Si la somme des e est donnée, ainsi que la droite b, on aura aussi comme donnée celle des rectangles be. En inversant la méthode que nous avons exposée au début de cette Dissertation, posons $be = \overline{o^2}$, d'où $\frac{\overline{o^2}}{b} = e$. Substituant à e sa nouvelle valeur, il viendra

$$b^4 = a^2 \overline{o^2} + b^2 \overline{o^2}.$$

Nous avons là une première opération, inverse de celle indiquée au début de la Dissertation, et qui a conduit à une nouvelle courbe où il reste à chercher si la somme des $\overline{o^2}$ est donnée.

Il faut donc recourir à la seconde méthode qui de la somme des carrés des ordonnées conduit à la somme des ordonnées simples.

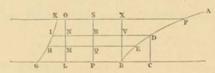
D'après la méthode précédente exposée en seconde ligne, posons $\frac{bu}{\overline{o}} = a$ et substituons à a la nouvelle valeur que lui assigne cette méthode. Il viendra $b^4 - b^2 \overline{o^2} = b^2 u^2$, et divisant tous les termes par b^2, $b^2 - \overline{o^2} = u^2$, équation du cercle. La somme des u est donc donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle.

Si nous remontons à la première courbe : $b^3 = a^2 e + b^2 e$, il en résulte que l'aire de cette courbe peut être carrée en supposant la quadrature du cercle, et nous sommes facilement et rapidement arrivés à cette conclusion par notre analyse, au moyen de deux courbes différentes de la précédente.

L'utilité de tout ce qui précède sera immédiatement reconnue par un analyste subtil, tant pour l'invention de droites égales à des courbes, que pour nombre d'autres problèmes qui n'ont pas encore été assez approfondis.

Soient (*fig.* 148) AB une parabole primaire, CB son axe, CD l'ordonnée égale à l'axe CB et au paramètre BV. Prenez BP, PL, LG

Fig. 148.



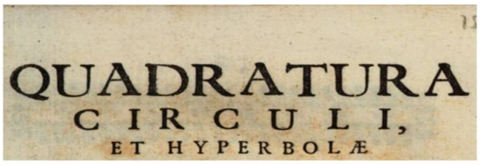
égales entre elles et à l'axe CB, et portées sur son prolongement. Menez à CD les parallèles indéfinies BX, PS, LO (qui seront données) et par un point quelconque F de la courbe, menez à l'axe la parallèle FXSOK rencontrant les droites BX, PS, LO aux points X, S, O. Faites enfin $\frac{FX + XS}{SO}$ ou $\frac{XS}{SO} = \frac{SO}{OK}$. Prenant de même les points D, E, faites $\frac{DR}{RN} = \frac{RN}{NI}$ et $\frac{EQ}{QM} = \frac{QM}{MH}$. Imaginez par les points G, H, I, K, ... une courbe indéfinie qui aura pour asymptote la droite indéfinie LO.

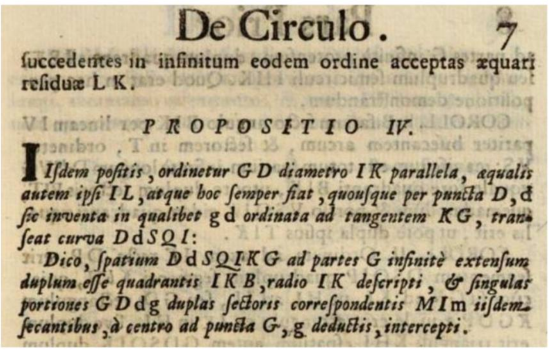
Cette courbe GHIK est celle dont l'espèce est définie par l'équation précédente, $b^3 = a^2 e + b^2 e$. Je dis donc, d'après la réitération indiquée ci-dessus des opérations analytiques, que l'aire KIHGLMNO, qui se prolonge indéfiniment du côté des points K, O, est égale au *double* du cercle ayant pour diamètre l'axe BC. C'est ainsi que nous avons immédiatement résolu cette question que nous proposait un savant géomètre.

La storia della famiglia delle versiere ha inizio nel 1600. Le prime tracce di questa curva si trovano nelle *Oeuvres*...1679 di Pierre De Fermat, compaiono in due opere diverse, una in latino e una in francese. Vediamo qui due pagine di quest'ultima. A sinistra Fermat propone l'equazione di una nuova curva secondo lui molto promettente per i geometri, a destra vediamo la prima rappresentazione di tale curva , molto diversa da come la conosciamo: a destra la conica generatrice, in mezzo i due segmenti medi proporzionali OS e SX e a sinistra la curva generata GHIK.

SLIDE 6

Guido Grandi


QUADRATURA
CIRCULI,
ET HYPERBOLÆ

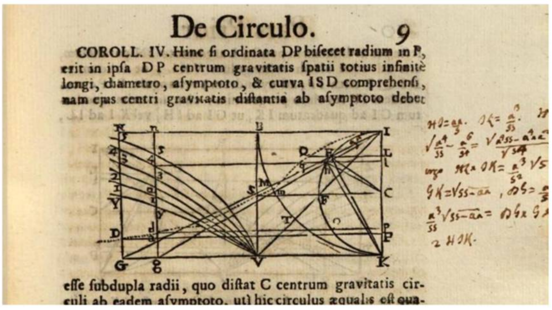

De Circulo. 7

succedentes in infinitum eodem ordine acceptas æquari residuæ L K.

PROPOSITIO IV.

Iisdem positis, ordinetur G D diametro I K parallela, æqualis autem ipsi I L, atque hoc semper fiat, quousque per puncta D, d sic inventa in qualibet g d ordinata ad tangentem K G, transeat curva D d S Q I:

Dico, spatium D d S Q I K G ad partes G infinitè extensum duplum esse quadrantis I K B, radio I K descripti, & singulas portiones G D d g duplas sectoris correspondentis M I m iisdem secantibus, à centro ad puncta G, g deductis, intercepti.


De Circulo. 9

COROLL. IV. Hinc si ordinata DP bisecet radium in P, erit in ipsa DP centrum gravitatis spatii totius infinitè longi, diametro, asymptoto, & curva ISD comprehensi, nam ejus centri gravitatis distantia ab asymptoto debet

esse subdupla radii, quo distat C centrum gravitatis circuli ab eadem asymptoto. ut hic circulus æqualis est qua-

Il secondo autore che si occupa di questa curva è Guido Grandi (1671-1742) nella *Quadratura Circuli et Hyperbolae (1703).* Nella pagina a sinistra vediamo la *Proposizio 7* dove spiega le caratteristiche della curva e a pagina 9 la curva come la conosciamo noi. In questo testo compare per la prima volta il nome *versoria* da dove *versiera.*

SLIDE 7

NOTE AL TRATTATO DEL GALILEO

DEL MOTO NATURALMENTE ACCELERATO

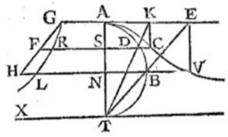
DEL P. AB. D. GUIDO GRANDI

Matematico di S. A. R. e dell' Univerſità di Piſa.

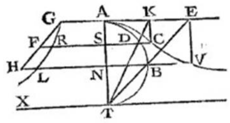
Corollario VI.

Quando poi le forze fuſſero reciproche de' quadrati delle diſtanze, ſarebbe la ſcala A G F H un' iperbola quadratica fra gli ſteſſi aſintoti; e la ſcala delle velocità A C V ſarebbe quella curva, che io deſcrivo nel mio libro delle quadrature alla prop. 4. nata da' ſeni verſi, che da me ſuole chiamarſi la *Verſiera*, in latino però *Verſoria:* dimanierachè le velocità S C, N V ſarebbero in ragione compoſta della ſudduplicata de' ſpazj ſcorſi A S, A N direttamente, e della ſudduplicata de' ſpazj che reſtano fino al termine T, cioè di N T, S T reciprocamente.

12 Il che però non ſi potendo dimoſtrare dalle coſe da me nel luogo citato circa le proprietà di queſta curva propoſte; ſtimo bene, atteſa l' utilità, che può ricavarſi in Meccanica da queſta Curva, il darne ora queſta facile deſcrizione, ricavandone ciò che fa al noſtro propoſito. Sia dunque il mezzo cerchio A D B T, e nel punto eſtremo A del diametro lo tocchi la retta A E, a cui dall' altro termine del diametro T ſi conducano le rette T K, T E, ſeganti la periferia in D, B, ed ordinate le D S, B N nel ſemicircolo, ſi compiſcano i rettangoli K A S C, E A N V. La curva che paſſa pe' punti A, C, V così determinati, è la noſtra *Verſiera*, ed è evidente eſſere i quadrati S C, N V eguali a' quadrati A K, A E; ma il quadrato A K al quadrato A E ha ragione compoſta del quadrato A K al quadrato A T, e di queſto al quadrato A E; delle quali ragioni la prima è quella del quadrato S D al quadrato S T, ovvero della retta A S alla S T; la ſeconda è quella del quadrato T N al quadrato N B, ovvero della T N alla A N; pertanto ſarà il qua-



in ragione compoſta delle medeſime A S ad A N, ed N T ad S T. perchè deſcritta per G tra gli ſteſſi aſintoti l' iperbola d' Apollonio G R L, onde il rettangolo G A S rieſca lo ſteſſo col rettangolo R S T, ovvero L N T, i detti eceſſi ſaranno, come i rettangoli di F R in S T, e di H L in N T, o pure (giacchè F S a G A ſta, come il quadrato A T al quadrato S T, cioè come il quadrato S R al quadrato G A, onde ſono continuamente proporzionali F S, R S, G A, e però F S ad R S è come R S a G A, o come A T ad S T, e dividendo F R ad R S, come A S ad S T, ed il rettangolo di F R in S T uguaglia quello di R S in S A, ſiccome per la ſteſſa ragione il rettangolo di H L in N T uguaglia quello di L N in N A) come il rettangolo R S A al rettangolo L N A; che è in ragione compoſta di S A ad N A, e di R S ad L N, che è come di N T ad S T; dunque l'area della ſcala delle forze A G F S all' area della ſcala A G H N è, come il quadrato dell' ordinata nella Verſiera S C al quadrato della N V; e però la detta Verſiera A C V è la ſcala delle velocità, come ſi dovea dimoſtrare.



14 Queſta è l' ipoteſi più comunemente abbracciata da' Matematici moderni circa la forza della Gravità, che ſpigne i corpi ſuperiori alla ſuperficie della terra verſo il ſuo centro, o ancora ciaſcun Pianeta primario verſo il Sole, e ciaſcuno de' ſecondarj Pianeti verſo il ſuo primario, come può vederſi appreſſo il Nevvton *nelle propoſizioni* 71. 75. 76. *del lib.* 1. *de' ſuoi Principj Matematici della Filoſofia, e nella prop.* 8. *del lib.* 3. appreſſo David Gregorio *nella ſua Aſtronomia prop.* 28. 29. 42. 45. appreſſo il Leibnitzio *negli Atti di Lipſia di Febbrajo del* 1689. appreſſo Criſtiano Ugenio *nel diſcorſo della Cagione della Gravità pag.* 160. ed altri Autori: ed è ciò coerente all' oſſervazioni de' moti de' Pianeti, ed alla celebre regola del Keplero in eſſi oſſervata, cioè che i quadrati de'

La curva viene ripresa successivamente da Grandi in: *Note al Trattato del Galileo del moto naturalmente accelerato (1744).* Spiega come la curva possa avere un'utilità in meccanica. La velocità è rappresentata da ACV che sarebbe quella curva che lui chiama *versiera*.

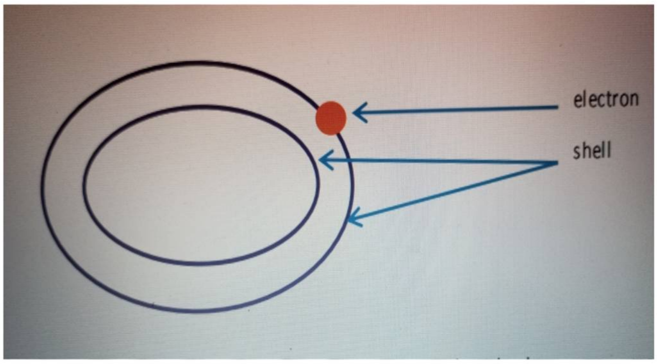
"…e la scala delle velocità ACV sarebbe quella curva che io descrivo nel mio libro delle quadrature alla prop. 4. nata da seni versi che da me suole chiamarsi la *versiera*, in latino però *versoria*…"

SLIDE 8

Significato delle versiere in fisica

La funzione di densità di probabilità della distribuzione di Cauchy .

Quando l'elettrone scende al livello energetico più basso e rilascia l'energia in eccesso emettendo un fotone, la frequenza con cui l'energia viene emessa non è sempre la stessa. In alcuni casi segue una legge probabilistica con distribuzione lorentziana, della stessa forma della versiera di Agnesi.



Ricordiamo che inoltre la versiera viene utilizzata in fisica relativamente alla funzione di densità di probabilità della distribuzione di Cauchy.

Quando l'elettrone scende al livello energetico più basso e rilascia l'energia in eccesso, emettendo un fotone, la frequenza con cui l'energia viene emessa non è sempre la stessa. In alcuni casi segue una legge probabilistica con distribuzione lorentziana, della stessa forma della versiera di Agnesi.

SLIDE 9

“l'attività di apprendimento è un'attività che, oltre a consentire agli studenti di acquisire familiarità con la conoscenza culturale in modo profondo, critico e riflessivo, ~~fornisca~~ abbia da fornire opportunità di emancipazione, permettendo agli studenti di affermarsi come soggetti sociali, storici e culturali” [L. RADFORD]

Passiamo ora all’esperienza didattica di cui vorremmo dare traccia.

Nell’ottica che “*l'attività di apprendimento è un'attività che, oltre a consentire agli studenti di acquisire familiarità con la conoscenza culturale in modo profondo, critico e riflessivo, abbia da fornire opportunità di emancipazione, permettendo agli studenti di affermarsi come soggetti sociali, storici e culturali*” [L. Radford, 2020] si è proceduto in modo che gli studenti lavorassero per produrre specifici contributi, tra di loro complementari per la realizzazione del progetto, adatti a valorizzare competenze diversificate, al fine di indurre relazioni positive tra ragazzi con potenzialità espressive e bagagli culturali differenti, a volte, e a torto, confusi in modo discriminante con diversi livelli di merito intellettuale.

Lo svolgimento delle attività, che tendevano ad un apprendimento consapevole e inclusivo, ha avuto quindi come elemento trainante il contrappunto tra una particolare attenzione per gli aspetti collegiali degli interventi sviluppati dai ragazzi, essenziali per una crescita sia umana che culturale, e la costruzione della consapevolezza di come l’attività *condivisa* traesse linfa dalle conoscenze e dalle caratteristiche individuali e diversificate di ognuno di loro.

Tutto ciò al fine del rafforzamento dell’identità personale di ciascuno studente e dell’autostima nella relazione con la matematica e con il suo apprendimento.

Alcuni suggerimenti derivanti da considerazioni legate alla Storia della Matematica hanno dato profondità di campo complessiva al lavoro, avviando i ragazzi a considerazioni sul fatto che gli strumenti matematici concettuali e operativi appresi, insieme ai registri, ai segni, che ne consentono l’espressione e la condivisione, possono a volte mostrare una cronologia di sviluppo storico e concettuale in analogia con le fasi e la naturalezza del loro apprendimento personale

SLIDE 10

“*Questo uso pedagogico della storia consiste nell'intrecciare la nostra conoscenza degli sviluppi concettuali del passato con la progettazione di attività in classe, il cui obiettivo è quello di migliorare lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti.*”. (Furinghetti F., Radford L., 2009)

Questo uso pedagogico della storia consiste nell'intrecciare la nostra conoscenza degli sviluppi concettuali del passato con la progettazione di attività in classe, il cui obiettivo è quello di migliorare lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti.”. (Furinghetti F., Radford L., 2009)

Si è cercato inoltre di lavorare sulle dissonanze tra le competenze dei ragazzi, a prima vista ostacoli ma, se opportunamente sfruttate, strumenti efficaci per implementare la loro creatività e le possibilità di ampliare i canali di comunicazione attraverso un’azione corale.

Le situazioni e gli argomenti rispetto ai quali si sono formati i gruppi di studenti in base ai loro interessi e considerando i vari registri espressivi utilizzati sono stati i seguenti :

Slide 11

- (Gruppo A) Una ricerca storica sulla vita, le opere filosofiche e scientifiche, le caratteristiche umane e intellettuali di Maria Gaetana Agnesi. (George, Giada, Giorgia, Lin)
- (Gruppo B) Quattro momenti: una *performance,* un gioco che prevedeva il posizionamento di un certo numero di dischetti rossi sul pavimento della terrazza della scuola; quindi un disegno, del posizionamento degli elementi intervenuti nella *performance*; poi gli stessi elementi prima considerati nel registro della geometria euclidea e poi nel registro dell'algebra; (Alessio, Daniel, Davide P., Gabriele, Mattia)
- (Gruppo C) La ricerca dell'espressione algebrica generalizzata della versiera nel registro analitico; (Davide F., Leonardo, Mario C.)
- (Gruppo D) La costruzione di un artefatto meccanico per disegnare la versiera e la possibilità di "generalizzare" tale artefatto per disegnare curve di grado superiore; (Mario G., Nicholas).

- (Gruppo A) Una ricerca storica sulla vita, le opere filosofiche e scientifiche, le caratteristiche umane e intellettuali di Maria Gaetana Agnesi. (George, Giada, Giorgia, Lin)
- (Gruppo B) Quattro momenti: una *performance,* un gioco che prevedeva il posizionamento di un certo numero di dischetti rossi sul pavimento della terrazza della scuola; quindi un disegno del posizionamento degli elementi intervenuti nella *performance*; poi gli stessi elementi prima considerati nel registro della geometria euclidea e poi nel registro dell'algebra; (Alessio, Daniel, Davide P., Gabriele, Mattia)
- (Gruppo C) La ricerca dell'espressione algebrica generalizzata della versiera nel registro analitico; (Davide F., Leonardo, Mario C.)

L'esposizione dell'attività dei gruppi precedenti a tutti gli altri studenti dello stesso Istituto ha indotto, successivamente, la formazione di un quarto gruppo (D) che ha sviluppato un'ulteriore tematica:

- (Gruppo D) La costruzione di un artefatto meccanico per disegnare la versiera e la possibilità di "generalizzare" tale artefatto per disegnare curve di grado superiore; (Mario G., Nicholas).

Slide 12

- *Introduzione alle "Istituzioni Analitiche":*
- *«Non avvi alcuno, il quale informato essendo delle Matematiche cose, non sappia altresì quanto, in oggi spezialmente, sia necessario lo studio dell'analisi e quali progressi si sieno con questa fatti, si facciano tuttora, e possano sperarsi nell'avvenire; che però non voglio, né debbo trattenermi qui in lodando questa scienza, che punto non ne abbisogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la necessità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invoglj di farne acquisto, grandi altrettanto sono le difficoltà, che vi s'incontrano, essendo noto, e fuor di dubbio, che non ogni Città, almeno nella nostra Italia, â persone, che sappiano, o vogliano insegnarla, e non tutti ânno il modo di andar fuori della Patria a cercarne i Maestri.»*

Procedendo ora in dettaglio, gli studenti del Gruppo A hanno preso a punto di partenza una comunicazione *Al Lettore* di particolare fascino che si trova nell'Introduzione alle "*Istituzioni Analitiche*" di Maria Gaetana Agnesi:

«Non avvi alcuno, il quale informato essendo delle Matematiche cose, non sappia altresì quanto, in oggi spezialmente, sia necessario lo studio dell'analisi e quali progressi si sieno con questa fatti, si facciano tuttora, e possano sperarsi nell'avvenire; che però non voglio, né debbo trattenermi qui in lodando questa scienza, che punto non ne abbisogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la necessità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invoglj di farne acquisto, grandi altrettanto sono le difficoltà, che vi s'incontrano, essendo noto, e fuor di dubbio, che non ogni Città, almeno nella nostra Italia, â persone, che sappiano, o vogliano insegnarla, e non tutti ânno il modo di andar fuori della Patria a cercarne i Maestri.»

SLIDE 13

MARIA GAETANA AGNESI (1718 – 1799)

- 1718, 16 maggio Maria Gaetana naque a Milano, da Don Pietro Agnesi Mariani e Donna Anna Brivio, appartenenti alla ricca borghesia milanese.
- Venne educata dai migliori maestri dell'epoca
- 1727 recitò nel salotto paterno una sua traduzione in latino di un discorso in italiano dell'abate Gemelli: *Oratio, qua ostenditur: artium liberalium studia a femineo sexu neutiquam aborrere .*
- 1737 iniziò a studiare filosofia e matematica, occupandosi di logica, fisica, biologia e meteorologia e discutendo le sue opinioni in società.
- 1738 pubblicò 191 tesi dal titolo *Propositiones Philosophicae*, una raccolta di saggi di filosofia naturale e storia ispirata alle sue discussioni con gli ospiti della famiglia.
- 1739 espresse il desiderio di abbandonare la vita mondana e di prendere i voti. Il padre le consentì una vita ritirata.

Gli studenti hanno lavorato alla biografia della Agnesi raccogliendo i dati opportuni. Hanno sentito la necessità di capire meglio la condizione femminile del Settecento italiano, di quale "scuola" si potesse parlare in quel periodo per entrare nelle caratteristiche dell'educazione ricevuta da Maria Gaetana Agnesi e del suo rapporto con la famiglia. Ecco in sintesi le notizie di riferimento:

- 1718, 16 maggio, Maria Gaetana nacque a Milano, da Don Pietro Agnesi Mariani e Donna Anna Brivio, appartenenti alla ricca borghesia milanese.
- Venne educata dai migliori maestri dell'epoca.
- 1727 recitò nel salotto paterno una sua traduzione in latino di un discorso in italiano dell'abate Gemelli: *Oratio, qua ostenditur: artium liberalium studia a femineo sexu neutiquam aborrere*
- 1737 iniziò a studiare filosofia e matematica, occupandosi di logica, fisica, biologia e meteorologia e discutendo le sue opinioni in società.
- 1738 pubblicò 191 tesi dal titolo *Propositiones Philosophicae*, una raccolta di saggi di filosofia naturale e storia ispirata alle sue discussioni con gli ospiti della famiglia.
- 1739 espresse il desiderio di abbandonare la vita mondana e di prendere i voti. Il padre le consentì una vita ritirata.

SLIDE 14

- 1748 Il risultato della sua ricerca fu la pubblicazione delle *Istituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana* che contiene lo studio della *Versiera.*
- 1750 Papa Benedetto XIV propose all' Agnesi la cattedra di professore di Matematica all'Università di Bologna, ma lei non accettò
- 1752, Maria Gaetana si concentrò interamente sulla carità. Organizzò un ospedale a casa propria .
- 1768, grazie ai suoi studi di teologia, Maria Gaetana fu nominata "Prelato della dottrina cristiana" dall'arcivescovo di Milano.
- 1799, il 9 gennaio Maria Gaetana Agnesi muore a Milano.

- 1748 Il risultato della sua ricerca fu la pubblicazione delle *Istituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana* che contiene lo studio della *Versiera.*
- 1750 Papa Benedetto XIV propose all' Agnesi la cattedra di professore di Matematica all'Università di Bologna, ma lei non accettò
- 1752, Maria Gaetana si concentrò interamente sulla carità. Organizzò un ospedale a casa propria.
- 1768, grazie ai suoi studi di teologia, Maria Gaetana fu nominata "Prelato della dottrina cristiana" dall'arcivescovo di Milano.
- 1799, il 9 gennaio Maria Gaetana Agnesi morì a Milano.

SLIDE 15

Performance dei ragazzi

Witch of Agnesi.MP4

Ai ragazzi del Gruppo B il docente di matematica ha proposto una *performance*, nello specifico una attività “dinamica” da realizzare con un hula hoop, tre funi di naylon, due aste rigide e dei dischetti rossi. Con tale strumentazione gli alunni avrebbero dovuto compiere una serie di gesti per posizionare i dischetti sul pavimento di una terrazza della scuola. Il docente aveva anticipato che le posizioni dei dischetti avrebbero successivamente trovato riscontro nella versiera di Agnesi di cui aveva parlato il professore di fisica nella sua lezione.

SLIDE 16

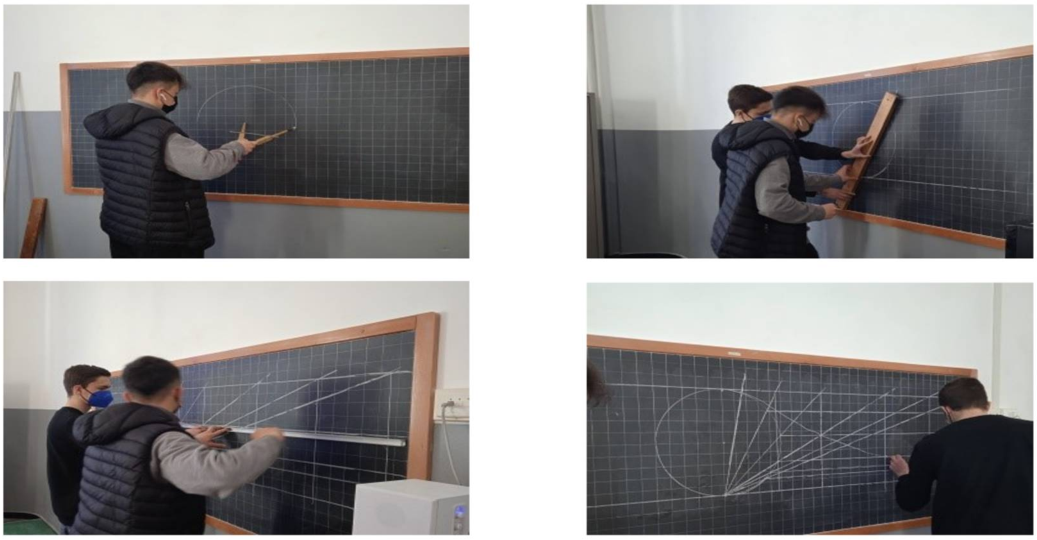
Due momenti della performance realizzata dagli studenti

Come si vede, due delle funi a disposizione sono annodate in due punti opposti del cerchio di plastica dell'hula hoop. Le due funi sono fissate in modo tale da mantenere tra esse la distanza che hanno tra loro i nodi sull'hula hoop. La terza fune è annodata sul nodo di una delle prime due (prima fune) e, mantenuta tesa, può essere ruotata a piacimento in modo da intercettare un punto sull'hula hoop e un punto sull'altra fune (seconda fune). Due aste rigide sono posizionate una per ciascuno dei due punti appena individuati, la prima asta parallela alle due funi fissate e passante per il punto intercettato sul cerchio dalla terza fune, la seconda perpendicolare alla prima e passante per il punto intercettato dalla terza fune sulla seconda fune. In corrispondenza del punto di incontro delle due aste i ragazzi hanno collocato un gettone colorato.

A questo punto il docente di matematica ha chiesto ai ragazzi di raccontare la loro esperienza. I ragazzi hanno fatto un vivace resoconto verbale in termini di hula hoop, di funi tese, di incroci di aste di metallo, di loro spostamenti sul pavimento, di dischetti rossi, ecc., ripercorrendo nel loro racconto la successione dei movimenti che erano stati costitutivi della performance. L’insegnante ha fatto notare che nella loro esposizione avevano utilizzato il linguaggio naturale, la loro lingua madre.

SLIDE 17

Alcuni disegni realizzati dagli studenti alla lavagna durante la *performance*.

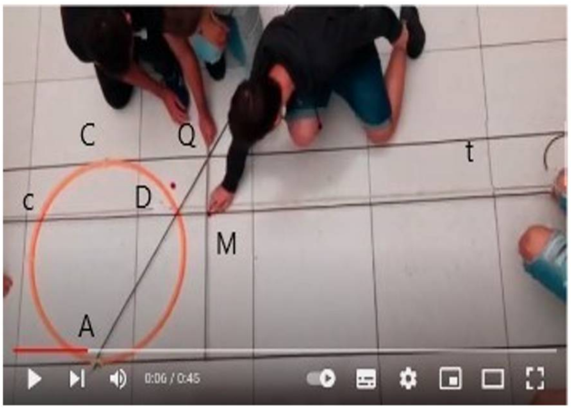


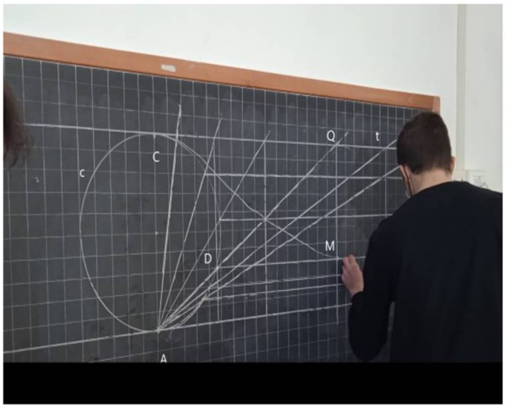
Per il passo successivo l’insegnante ha proposto di tracciare sulla lavagna con il gesso gli elementi più significativi coinvolti nella performance. I ragazzi hanno quindi tracciato sulla lavagna dei *segni*, riflessi delle loro *azioni*, passando dai movimenti eseguiti nella performance alla traduzione grafica del prodotto di tali movimenti, creando *corrispondenze* tra i tratti delle funi di nylon, delle aste rigide, dei loro incroci e le linee lasciate sulla lavagna dal gesso, diventando via via consapevoli che stavano costruendo un *modello* grafico degli effetti delle loro azioni. Come espresso a parole da uno di loro, avevano lavorato “*come il sarto che riproduce su carta il modello di un vestito che ha visto in vetrina”*.

L’insegnante, facendo osservare ai ragazzi che al registro del linguaggio naturale, con il quale avevano descritto le operazioni eseguite, avevano accostato un registro grafico, ha sottolineato che ora erano due i registri espressivi ai quali potevano riferirsi per comunicare la loro esperienza. Un qualunque spettatore, oltre ad ascoltare il racconto, poteva anche guardare una figura che teneva memoria dello sviluppo del racconto, rendeva presenti agli occhi e permetteva di far coesistere le tracce dei vissuti di momenti diversi fissati nelle posizioni dei punti sulla lavagna, segni rappresentativi delle posizioni dei dischetti sul pavimento.

SLIDE 18

Un estratto dal video (a sinistra) e un disegno alla lavagna (a destra) in cui gli studenti hanno riportato le diverse configurazioni prodotte durante la performance.





A questo punto l'insegnante ha proposto ai ragazzi di coinvolgere un apprendimento della loro esperienza scolastica, quello della matematica. Insieme avrebbero tentato di "immergere" la comunicazione della loro attività nel registro della geometria euclidea dopo aver dedicato una parte della lezione ad alcuni cenni storici sulla matematica greca ed in particolare su Euclide (III secolo A. C.).

L'insegnante ha continuato invitando i ragazzi a individuare le figure geometriche da associare ai disegni che avevano tracciato sulla lavagna evocanti le configurazioni prodotte durante la tensione delle funi nei vari momenti di deposizione dei dischetti sul pavimento.

Gli allievi, seguendo lo stile di Euclide, hanno nominato con lettere maiuscole i punti di incontro delle linee che avevano tracciato sulla lavagna e poi hanno riconosciuto in tali tracce grafiche oggetti della geometria quali i segmenti, il cerchio, il suo diametro, le rette parallele tra loro, le rette tangenti al cerchio, i triangoli rettangoli, un rettangolo, tutti elementi geometrici che si ripetevano in ciascuna delle configurazioni prodotte per trovare la posizione del dischetto da depositare sul pavimento. Ancora, sollecitati dall'insegnante, hanno ricordato alcune proprietà caratterizzanti le figure individuate.

SLIDE 19

Gli studenti sono quindi arrivati a condividere il racconto della loro esperienza nei termini di un terzo registro, quello della geometria di Euclide, esprimendosi come segue:

Abbiamo preso una circonferenza, due suoi punti diametralmente opposti A e C, abbiamo considerato la tangente alla circonferenza nel punto C. Poi abbiamo considerato un punto D sulla circonferenza diverso da A e da C e abbiamo tracciato la retta AD. Abbiamo chiamato Q il punto d'incontro della retta AD con la tangente in C alla circonferenza. Abbiamo considerato la retta parallela alla tangente in C, passante per D, e abbiamo visto che incontra la retta parallela al diametro AC, passante per Q, in un punto M. Il punto M è il luogo in cui abbiamo posato il nostro dischetto rosso. Per trovare altri punti analoghi a M abbiamo cambiato la scelta del punto D sulla circonferenza e abbiamo ripetuto il procedimento, riproducendo ogni volta lo stesso schema.

Gli studenti sono quindi arrivati a condividere il racconto della loro esperienza nei termini di un terzo registro, quello della geometria di Euclide, esprimendosi come segue:

Abbiamo preso una circonferenza, due suoi punti diametralmente opposti A e C, abbiamo considerato la tangente alla circonferenza nel punto C. Poi abbiamo considerato un punto D sulla circonferenza diverso da A e da C e abbiamo tracciato la retta AD. Abbiamo chiamato Q il punto d'incontro della retta AD con la tangente in C alla circonferenza. Abbiamo considerato la retta parallela alla tangente in C, passante per D, e abbiamo visto che incontra la retta parallela al diametro AC, passante per Q, in un punto M. Il punto M è il luogo in cui abbiamo posato il nostro dischetto rosso. Per trovare altri punti analoghi a M abbiamo cambiato la scelta del punto D sulla circonferenza e abbiamo ripetuto il procedimento, riproducendo ogni volta lo stesso schema.

A questo punto l'insegnante è passato all'obiettivo successivo del percorso che consisteva nel traghettare il gruppo di allievi dal registro euclideo a quello algebrico, conducendoli, attraverso una serie di successivi incontri, a esprimersi in termini algebrici per scrivere una formula che individuasse i punti della versiera in un piano cartesiano ma in modo che la percezione e il contatto con l'oggetto di cui essi stavano parlando si mantenessero inalterati mentre si trasformavano i segni con i quali esso veniva descritto. Il linguaggio algebrico non solo non doveva scollegarli dal proprio vissuto esperienziale iniziale e dalle tecniche fino ad allora adottate per esprimerlo, ma doveva promuovere in aggiunta un ri-conoscimento [Radford, 2017] dell'oggetto di studio e delle sue caratteristiche che inducesse nei ragazzi conoscenza nuova e consapevolezza dell'acquisizione di nuove potenzialità espressive fornite dal nuovo registro.

L'insegnante ha allora lavorato attirando l'attenzione dei ragazzi su due ambiti:

- la geometria di Euclide aveva fatto "registro" dell'effetto dei movimenti sul pavimento relativamente al posizionamento del punto M e lo aveva raccontato con i suoi segni e i suoi termini.

- Siccome le conoscenze matematiche della classe riguardavano anche l'algebra, si poteva tentare di parlare del prodotto dei loro movimenti nella performance in termini algebrici e osservare come l'algebra potesse descriverli con il suo linguaggio.

Si è rivolto così ai ragazzi proponendo:

SLIDE 20

Facciamo questo tentativo insieme partendo da questa domanda: possiamo individuare qualcosa che caratterizzi la natura dei nostri punti, qualcosa che sia comune a tutte le configurazioni, che permanga quando passiamo da una configurazione all'altra?

"*Facciamo un tentativo insieme partendo da questa domanda: possiamo individuare qualcosa che caratterizzi la natura dei nostri punti, qualcosa che sia comune a tutte le configurazioni, che permanga quando passiamo da una configurazione all'altra?*"

SLIDE21

Angelo)*… ma prof… i triangoli sono tutti diversi uno dall'altro…*

Cristian)*… si… vede, gli angoli cambiano sempre…*

Gianluca)*… ogni volta che ci spostiamo la corda si inclina sempre di più…*

Angelo)*… sembra che niente si mantenga identico mentre ci spostiamo…*

Cristian)*… i lati dei triangoli cambiano… ad ogni spostamento certi lati si allungano più di altri… più si inclina la corda e più questo angolo rimpicciolisce… mentre il triangolo sembra diventare più esteso...*

Gianluca) *…Tutto si trasforma! Ogni configurazione è diversa dall'altra…*

Di seguito alcune frasi tipo enunciate dai ragazzi, registrate durante le discussioni in classe e rappresentative delle loro reazioni all'espressione "*qualcosa che sia comune a tutte le configurazioni*":

Angelo)*… ma prof… i triangoli sono tutti diversi uno dall'altro…*

Cristian)*… si… vede, gli angoli cambiano sempre…*

Gianluca)*… ogni volta che ci spostiamo la corda si inclina sempre di più…*

Angelo)*… sembra che niente si mantenga identico mentre ci spostiamo…*

Cristian)*… i lati dei triangoli cambiano… ad ogni spostamento certi lati si allungano più di altri… più si inclina la corda e più questo angolo rimpicciolisce… mentre il triangolo sembra diventare più esteso...*

Gianluca) *…Tutto si trasforma! Ogni configurazione è diversa dall'altra…*

I ragazzi, come si evince dalle frasi precedenti, hanno fatto osservazioni in cui hanno realizzato paragoni tra una figura e la sua corrispondente nella configurazione successiva, fissato l'attenzione su un oggetto e poi commentato come gli elementi di tale oggetto si erano trasformati mentre il punto D si muoveva sulla circonferenza.

L' insegnante procede con alcune considerazioni:

- *Se guardiamo un oggetto in una configurazione e poi l'analogo nella configurazione successiva vediamo che le sue dimensioni sono cambiate… e sembra che tutte le osservazioni che facciamo non ci suggeriscano nulla di utile per rispondere alla nostra domanda.*

- *finora abbiamo guardato alle figure e alle loro grandezze in un ambito geometrico e abbiamo fissato l'attenzione su come tali grandezze occupano lo spazio, abbiamo* *constatato con gli occhi la presenza delle particolari tracce nel nostro disegno di oggetti definiti dalla geometria di Euclide.*

- Pensiamo ad un modo di operare tra le dimensioni degli oggetti, che stiamo studiando, che ci venga suggerito da alcune proposizioni della geometria euclidea e proviamo a vedere se qualche relazione che riguarda la misura dei segmenti delle figure, che stiamo considerando, possa esserci utile per parlare della nostra esperienza

SLIDE 22

Entrando nel nostro specifico, ricordate forse qualche" operazione" che la geometria euclidea enuncia a proposito delle figure coinvolte nelle nostre configurazioni?

Entrando nel nostro specifico, ricordate forse qualche" operazione" che la geometria euclidea enuncia a proposito delle figure coinvolte nelle nostre configurazioni?

SLIDE 23

Angelo) Allora... riprendiamo dalle figure che abbiamo disegnato…

Cristian)… la circonferenza di diametro AC*, … il rettangolo* $BCQM$*, … alcuni triangoli* ACQ*,* ABD*,* DQM*.*

Prof.: Ok, fissiamo l'attenzione sui triangoli… delle quattro operazioni aritmetiche che conoscete ce ne è forse qualcuna che si esegue coinvolgendo i lati dei triangoli? Vi aiuto… qualcosa che ad esempio parla di rapporti tra i lati di triangoli, qualcosa che fa pensare come il lato di un triangolo può stare in un altro…

Gianluca) Ci sta aiutando tantissimo… prof! ... Forse possiamo pensare ai rapporti tra i lati nei triangoli simili?

Prof.: Proprio così. Che cosa suggerisce la geometria a proposito dei lati corrispondenti di triangoli simili?

Angelo) ... ecco… possiamo pensare quella faccenda che… nei triangoli simili tra i lati corrispondenti… sono uguali i rapporti…

Cristian) Ah… volete dire che stiamo pensando all'operazione di divisione?

Prof: Proprio così! ... allora andiamo a vedere se abbiamo "prodotto" triangoli simili nella nostra performance sul pavimento e, in caso affermativo, che cosa possiamo scrivere per quanto riguarda i rapporti tra i loro lati in ciascuna delle nostre configurazioni… Suggerirei di osservare i triangoli nell'ordine e nel modo in cui li abbiamo prodotti seguendo lo schema della nostra performance iniziale. Quale triangolo abbiamo prodotto per primo?

Gianluca) È tutto registrato nel filmino e sulla lavagna...

I ragazzi hanno poi riguardato il video della loro performance e i disegni realizzati sulla lavagna.

Angelo) Il primo triangolo che abbiamo prodotto nei nostri movimenti è stato CAQ*, e poi* BAD *e poi subito dopo* DQM*, quello che ha il dischetto rosso nel vertice* M*.*

(Angelo) *Allora... riprendiamo dalle figure che abbiamo disegnato…*

(Cristian)*… la circonferenza di diametro* AC*, … il rettangolo* $BCQM$*, … alcuni triangoli* ACQ*,* ABD*,* DQM*.*

(Prof.) *Ok, fissiamo l'attenzione sui triangoli… delle quattro operazioni aritmetiche che conoscete ce ne è forse qualcuna che si esegue coinvolgendo i lati dei triangoli? Vi aiuto… qualcosa che ad esempio parla di rapporti tra i lati di triangoli, qualcosa che fa pensare come il lato di un triangolo può stare in un altro…*

(Gianluca) *Ci sta aiutando tantissimo… prof! ... Forse possiamo pensare ai rapporti tra i lati nei triangoli simili?*

(Prof.) *Proprio così. Che cosa suggerisce la geometria a proposito dei lati corrispondenti di triangoli simili?*

(Angelo) ... *ecco… possiamo pensare quella faccenda che… nei triangoli simili tra i lati corrispondenti… sono uguali i rapporti…*

(Cristian) *Ah… volete dire che stiamo pensando all'operazione di divisione?*

(Prof.) *Proprio così! ... allora andiamo a vedere se abbiamo "prodotto" triangoli simili nella nostra performance sul pavimento e, in caso affermativo, che cosa possiamo scrivere per quanto riguarda i rapporti tra i loro lati in ciascuna delle nostre configurazioni… Suggerirei di osservare i triangoli nell'ordine e nel modo in cui li abbiamo prodotti seguendo lo schema della nostra performance iniziale. Quale triangolo abbiamo prodotto per primo?*

(Gianluca) *È tutto registrato nel filmino e sulla lavagna...*

I ragazzi hanno allora riguardato il video della loro performance e i disegni realizzati sulla lavagna.

Angelo) Il primo triangolo che abbiamo prodotto nei nostri movimenti è stato CAQ*, e poi* BAD *e poi subito dopo* DQM*, quello che ha il dischetto rosso nel vertice* M.

SLIDE 24

I ragazzi hanno poi riguardato il video della loro performance e i disegni realizzati alla lavagna.

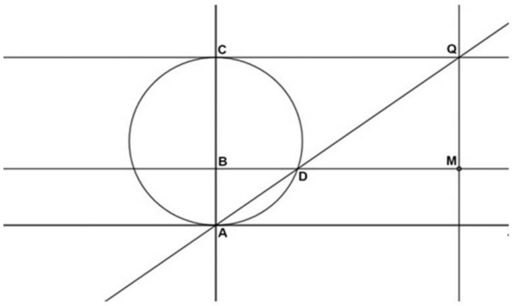
Il primo triangolo che abbiamo prodotto nei nostri movimenti è stato CAQ, poi BAD e poi subito dopo DQM, quello che ha il discetto rosso nel vertice M.

Guidati dall'insegnante, gli studenti hanno constatato la similitudine tra i triangoli ACQ e ABD e hanno concordato sulla proporzione: AB:BD=AC:CQ

Osservando successivamente che nel rettangolo BCQM il lato CQ è uguale al lato BM, si conviene che esiste anche la proporzione:

AB:BD=AC:BM (*)

quella in cui c'è il segmento che ha come estremo il punto M



A questo punto l'insegnante ha chiesto agli alunni di seguirlo mentre esprimeva in altro modo il segmento BD ancora utilizzando conoscenze euclidee.

L'insegnante ha ricordato agli studenti che un triangolo inscritto in un semicerchio è rettangolo e che in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. Per questi motivi è possibile scrivere la proporzione $AB : BD = BD : BC$ dalla quale ricavare $BD = \sqrt{AB \cdot BC}$.

Quindi ha espresso la proporzione (*) in questo modo:

$$AB : \sqrt{AB \cdot BC} = AC : BM$$

o anche, "*se ricordiamo il significato delle frazioni*", nel modo seguente: $\frac{AB}{\sqrt{AB \cdot BC}} = \frac{AC}{BM}$

SLIDE 26

Tabella 1. Corrispondenza tra procedimento nel registro geometrico (a sinistra) e procedimento nel registro cartesiano (a destra).

Racconto nel linguaggio di Euclide	Racconto nel linguaggio di Cartesio
$\frac{AB}{\sqrt{AB \cdot BC}} = \frac{AC}{BM}$	$\frac{y}{\sqrt{y(2r-y)}} = \frac{2r}{x}$ Dove r è il raggio della circonferenza, y è l'ordinata del punto M e x la sua ascissa. Adesso svolgiamo alcuni passaggi algebrici che ci consentono di esprimere y in funzione di x e di r.
$\frac{AB^2}{AB \cdot BC} = \frac{AC^2}{BM^2}$ $\frac{AB}{BC} = \frac{AC^2}{BM^2}$ $AB \cdot BM^2 = AC^2 \cdot BC = AC^2(AC - AB)$ $AB \cdot BM^2 = AC^3 - AC^2 \cdot AB$ $AB \cdot BM^2 + AC^2 \cdot AB = AC^3$ $AB(BM^2 + AC^2) = AC^3$ $AB = \frac{AC^3}{BM^2 + AC^2}$	$\frac{y^2}{y(2r-y)} = \frac{4r^2}{x^2}$ $\frac{y}{(2r-y)} = \frac{4r^2}{x^2}$ $yx^2 = 4r^2(2r-y)$ $yx^2 = 8r^3 - 4r^2y$ $yx^2 + 4r^2y = 8r^3$ $y(x^2 + 4r^2) = 8r^3$ $y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$

L'insegnante ha continuato a parlare ai ragazzi in questi termini:

...per diminuire il numero di segmenti con cui operare notiamo che BC lo possiamo vedere anche come la differenza tra AC e AB...

Immaginiamo ora di sovrapporre alla nostra figura, con origine nel punto A, un sistema di assi cartesiani, che voi già conoscete, fissando come asse x la retta tangente alla circonferenza in A e come asse y il diametro AC...

Impegniamoci a costruire una griglia che contenga a sinistra il racconto delle nostre figure espresso con il linguaggio di Euclide e a destra lo stesso racconto espresso con il linguaggio che ci ha proposto Cartesio, nominando cioè con una lettera minuscola i segmenti che Euclide nomina e scrivendo di seguito le due lettere maiuscole con cui ha chiamato i loro estremi...

Veniamo ora al percorso degli studenti del Gruppo C, quelli in grado di manipolare con agilità le conoscenze analitiche. I risultati da loro ottenuti convergono con i risultati esposti dai compagni del Gruppo B, costituendone il modello matematico generalizzato. Anche gli studenti del Gruppo C hanno posto l'origine del sistema di assi cartesiani nel punto A. La retta ADQ, che ruota attorno al punto A, può essere individuata dall'equazione: $y = mx$

Così hanno esposto i ragazzi del Gruppo C:

SLIDE 27

- *...Nasce poi la necessità di descrivere la circonferenza. Essa, sempre dalla geometria euclidea, è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto dato. Questa condizione, quando l'origine degli assi coincide con il centro della circonferenza, ci viene data dal teorema di Pitagora, essendo ascissa e ordinata tra loro sempre perpendicolari:* $y=\sqrt{r^2-x^2}$ *A questa dobbiamo aggiungere* r *perché il centro non è nell'origine delle coordinate ma più su di una quantità* r*, quindi* $y=\sqrt{r^2-x^2}+r$.
- *A questo punto per determinare le coordinate del punto* D *mettiamo a sistema il fascio di rette con l'equazione della circonferenza, facendo attenzione perché non tutto il fascio è coinvolto, solo alcuni valori di* m *servono*

$$\begin{cases} y=mx \\ y=\sqrt{r^2-x^2}+r \end{cases}$$

- *...Nasce poi la necessità di descrivere la circonferenza. Essa, sempre dalla geometria euclidea, è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto dato. Questa condizione, quando l'origine degli assi coincide con il centro della circonferenza, ci viene data dal teorema di Pitagora, essendo ascissa e ordinata tra loro sempre perpendicolari:* $y=\sqrt{r^2-x^2}$ *A questa dobbiamo aggiungere* r *perché il centro non è nell'origine delle coordinate ma più su di una quantità* r*, quindi* $y=\sqrt{r^2-x^2}+r$.
- *A questo punto per determinare le coordinate del punto* D *mettiamo a sistema il fascio di rette con l'equazione della circonferenza, facendo attenzione perché non tutto il fascio è coinvolto, solo alcuni valori di* m *servono*

$$\begin{cases} y=mx \\ y=\sqrt{r^2-x^2}+r \end{cases}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici gli studenti hanno ottenuto le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2mr}{m^2+1} \\ y_2 = \frac{2m^2r}{m^2+1} \end{cases}$$

Ecco le coordinate del punto D:

$$D\left(\frac{2mr}{m^2+1}, \frac{2m^2r}{m^2+1}\right)$$

Troviamo adesso le coordinate del punto Q:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = 2r \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2r}{m} \\ y = 2r \end{cases}$$

Le coordinate di Q *sono:* $Q\left(\frac{2r}{m}, 2r\right)$.

Le coordinate del punto M saranno l'ascissa di Q e l'ordinata di D, quindi

$$M\left(\frac{2r}{m}, \frac{2m^2r}{m^2+1}\right)$$

Per l'equazione cartesiana della versiera devono valere contemporaneamente le condizioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2r}{m} \\ y = \dfrac{2m^2r}{m^2+1} \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana $y = f(x)$(vedi Figura 5) *ricaviamo il parametro* m *dalla prima e lo sostituiamo nella seconda ottenendo*

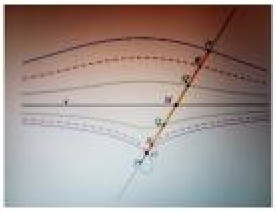
$$y = \frac{8r^3}{4r^2+x^2}$$

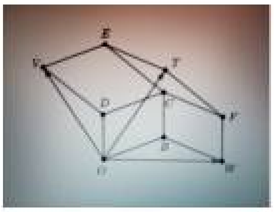
.

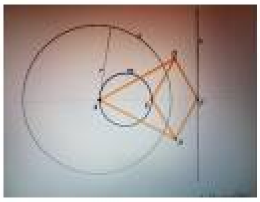
Un ulteriore registro per visitare questo “angolo di matematica” è nato durante il resoconto previsto come disseminazione dei risultati ottenuti e fatto al termine dell’Erasmus per i ragazzi di tutto l’Istituto. La questione ha particolarmente colpito un gruppo di due studenti (Gruppo D) del corso di “meccanica”, Mario e Nicholas, esperti in progettazione e stampa 3D che hanno provato a immaginare una macchina che disegnasse la versiera.

SLIDE 30

Macchine matematiche







(Teorema di Kempe). Data una curva algebrica Γ piana di grado n e un qualsiasi punto P su di essa, esiste un sistema articolato che traccia Γ in un intorno di P.

31

La storia delle Macchine Matematiche si perde nella notte dei tempi.

Si vedono riportati tre esempi di esse:

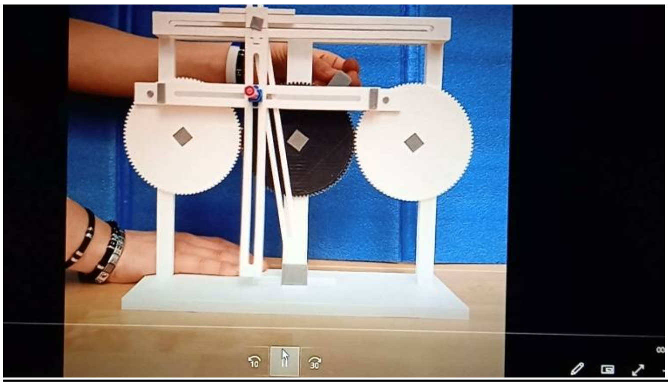
La prima figura rappresenta il *Compasso di Nicomede*

La seconda figura rappresenta il *Sommatore di vettori*

La terza figura rappresenta l'*Inversore di Peaucellier*

Una sintesi teorica sulle macchine matematiche può essere rappresentata dal teorema di Kempe citato nella slide.

SLIDE 31



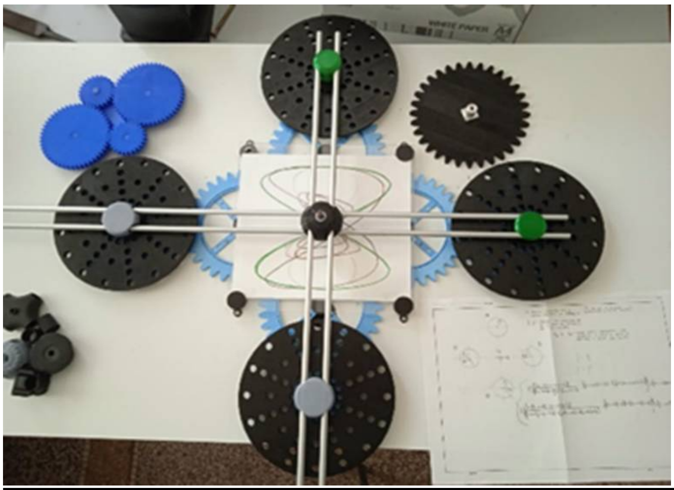
La macchina, nella mente dei ragazzi, doveva riprodurre l'effetto dei movimenti dei compagni del video e di chi aveva disegnato la versiera alla lavagna. Quei movimenti si potevano ottenere con un ingranaggio a tre ruote dentate e braccetti ad asola: uno libero di muoversi parallelamente a sé stesso e l'altro vincolato a simulare un fascio di rette. La difficoltà principale è stata il dimensionamento delle parti che dovevano vincere gli attriti. Dopo innumerevoli tentativi, approssimazioni e migliorie, i ragazzi hanno costruito un prototipo. Esso poteva essere un ulteriore strumento molto efficace per dare un resoconto di ogni posizione per costruire la curva.

SLIDE 32

Video Macchina versiera

SLIDE 33

Macchina realizzata dagli studenti per disegnare meccanicamente figure di Lissajous



I ragazzi sono andati anche oltre: mentre Mario si concentrava sulla produzione della macchina per la versiera, Nicholas, attraverso un sistema di quattro ingranaggi e quattro ruote forate, costruiva una macchina per disegnare la composizione, su due assi, delle funzioni seno e coseno. Otteneva così una vasta gamma di "figure di Lissajous", utilizzate per la misura di frequenza e fase di segnali sinusoidali.

La rilevanza didattica di queste macchine è notevole proprio nella visione del passaggio da una dinamica di rotazione nel tempo a una espansione lineare dello stesso.

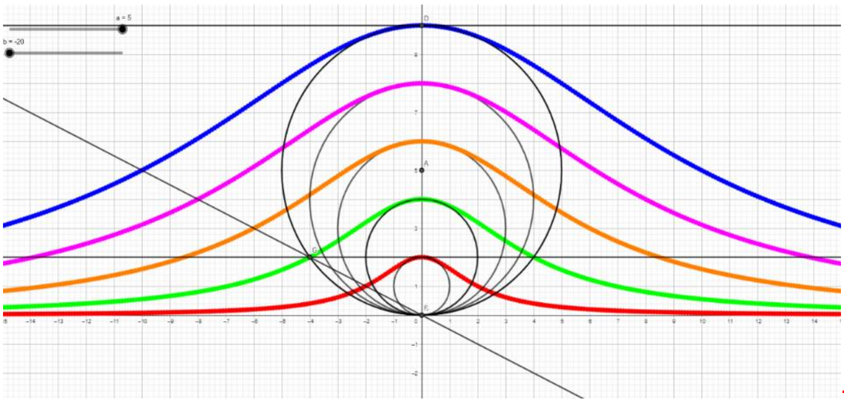
SLIDE 34

[Macchina figure di Lissajous]

[Spiegazione curve e macchinetta per Lissajous]

SLIDE 35

Diesgni di Versiere con GEOGEBRA



-

A complemento della costruzione delle macchinette i ragazzi hanno anche prodotto una visualizzazione delle curve utilizzando strumenti messi a disposizione in particolare servendosi del software di geometria dinamica GeoGebra.

SLIDE 36

CONCLUSIONI

Il percorso si è sviluppato lungo una serie di momenti successivi ai quali corrispondono relativi registri espressivi:

Il percorso si è sviluppato lungo una serie di momenti successivi:

- la performance, il gioco, "gesti silenziosi" la cui esecuzione ha avuto come scopo il posizionamento di dischetti rossi nello spazio della nostra realtà percepita;
- la narrazione dell'esperienza nel registro del linguaggio naturale;
- la produzione grafica, realizzata disegnando sulla lavagna, con il gesso, linee e punti rappresentanti gli stessi oggetti trattati nella performance secondo un determinato schema;
- la traduzione della produzione grafica nel registro della geometria euclidea;
- la traduzione dei termini individuati dalla narrazione euclidea nel registro dell'algebra;
- il grafico della versiera prodotto con un artefatto meccanico, nuovo registro per produrre l'andamento della curva, e la conseguente possibilità di "generalizzare" tale artefatto a curve di grado superiore;
- la riproduzione delle curve eseguite nel registro informatico con Geogebra.

SLIDE 37

Per concludere ci sembra che un ambito in cui potrebbe trovare una collocazione di senso l'esperienza alla quale si è fatto riferimento sia quello che

"***Mira a mettere a fuoco le specificità della natura della matematica e dei suoi modelli rispetto alle altre discipline e agli altri aspetti conoscitivi, e la conseguente necessità di costruire gradualmente, con via via diversi livelli di "astrazione", il significato dei diversi concetti matematici attraverso la costruzione di una rete complessa di riferimenti culturali ed esperienziali***."

che si trova tra quelli indicati nel volume: **La "COSTRUZIONE" del sapere matematico . Perché, cosa e come insegnare, Oggi**. (di DAPUETO, DELUCCHI, MALLARINO, PAOLA, PESCE, VANNUCCI, ZAMBONI) ARACNE, 2024]